

Distância entre dois pontos no Plano Cartesiano

1. Nível de ensino: Ensino Médio

2. Conteúdo Estruturante: Geometrias

2.1 **Conteúdo Básico:** Geometria Analítica

2.2 **Conteúdo Específico:** Distância entre dois pontos no plano cartesiano

3. Objetivos:

- Compreender o conceito de plano cartesiano.
- Aprender a marcar pontos no plano cartesiano.
- Aprender a calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

4. Número de aulas estimado: 6 aulas

5. Recursos:

- Jogo: Batalha Naval com Coordenadas Cartesianas. Disponível em:
<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1320>
- Vídeo 1: Um Ponto de Vista. Disponível em:
<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=7312>
- Vídeo 2: Jardim de Números. Disponível em:
<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=7266>

6. Justificativa:

Nesta sequência de aulas o estudante terá oportunidades para rever o conceito de plano cartesiano e o modo como se marcam pontos nesse plano. O aluno aprenderá a calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano para resolver problemas contextualizados.

A aprendizagem desses conceitos e conteúdos é fundamental para a continuidade dos estudos de Matemática no Ensino Médio, pois, como bem pontuado por Richit (2005, p. 40),

a Geometria Analítica tem a Álgebra como sua aliada mais importante, além de que é por meio deste método de estudo que Geometria e Álgebra se relacionam, pois problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos e relações algébricas são interpretadas geometricamente e esta transição é um processo de suma importância à construção do conhecimento nessa área.

Além disso, como se pode constatar nesta sequência de aulas, é importante dar acesso a conteúdos de geometria analítica ao estudante do Ensino Médio, pois se trata de uma área da matemática que tem aplicações em diversos campos da atividade humana, como, por exemplo, na arquitetura e nas artes. Ou, conforme afirma Santos (2008, p. 18),

deve-se oportunizar ao estudante do Ensino Médio o conhecimento desse método que transforma problemas geométricos em algébricos através de equações ou inequações, pela sua importância no processo histórico de construção do conhecimento matemático (e em outras áreas que fazem uso de resultados matemáticos como: Física, Astronomia...) e como ferramenta para resolução de problemas matemáticos. Uma abordagem correta também serve para desvincular a álgebra da simples e retroativa ideia de aritmética simbólica.

Assim, nesta sequência de aulas será trabalhado com dois fundamentos básicos da geometria analítica, que são: a localização de pontos no plano cartesiano e a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

7. Desenvolvimento

Esta sequência de aulas é destinada a alunos do Ensino Médio no início dos estudos de Geometria Analítica.

1.^a aula

- Antes da aula, acesse e estude o jogo “Batalha naval com coordenadas cartesianas”, disponível em:

[http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?](http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1320)

[conteudo=1320](#). Também assista e faça *download* do vídeo [Um ponto de vista](#).

- Ao iniciar esta primeira aula, explique aos alunos que será exibido um vídeo relacionados à geometria analítica. Trata-se do vídeo [Um ponto de vista](#), em que pode ser compreendida a origem do termo “coordenadas cartesianas”. O vídeo mostra aplicações do plano cartesiano na técnica do pontilhismo em pinturas. Por meio do vídeo os alunos terão a oportunidade de saber um pouco sobre a vida e a obra do pintor francês Georges Seurat (1859 – 1891) e do matemático e criador da geometria analítica René Descartes (1596 – 1650). Ainda por meio do conteúdo deste vídeo, os alunos terão acesso a aplicações da geometria analítica como a possibilidade de descrever uma forma sem mostrar o seu desenho correspondente, usando apenas números. Ou seja, essa geometria traduz em números a localização de elementos no espaço.
- Execute o vídeo fazendo uma pausa aos 5 minutos e 36 segundos, quando é mostrado o plano cartesiano com os quatro quadrantes. Aproveite esta parte do vídeo para revistar o plano cartesiano com os alunos. Lembre-os de que este plano é formado por duas retas que formam entre si um ângulo de 90 graus e que essas duas retas, separadamente, representam cada uma um conjunto dos números reais (\mathbb{R}). Por isso o plano cartesiano também é conhecido como \mathbb{R}^2 . Ou seja, o produto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Marque pelo menos um ponto em cada quadrante do plano, para que os alunos se lembrem de como se marcam pontos no plano cartesiano. Sugiro os pontos $P_1(2, 1)$; $P_2(-2, 1)$; $P_3(-2, -1)$ e $P_4(1, -2)$. Aproveite também para mostrar como se marca um ponto na origem do sistema de coordenadas cartesianas $P(0, 0)$.
- Retome a execução do vídeo e pare a reprodução aos 7 minutos e 56 segundos, quando é mostrado o plano cartesiano somente no primeiro quadrante. Aproveite para reforçar esse detalhe. Explique que, em alguns casos, como no do uso do plano cartesiano para reproduzir uma imagem, apenas o primeiro quadrante pode ser suficiente. Entretanto, dependendo da aplicação, é necessário que o plano cartesiano seja representado com os quatro quadrantes.
- Retome a execução do vídeo até o final e explique aos alunos que eles jogarão *batalha naval de coordenadas cartesianas* na próxima aula. Aproveite esta aula para preparar a turma para o jogo. Explique que o jogo que eles jogarão é um pouco diferente do que está no vídeo, pois o tabuleiro tem os quatro quadrantes do plano cartesiano.

- Reproduza na lousa o [tabuleiro do jogo](#), ou parte dele, com uma escala menor. Ou, se você tiver um recurso como um projetor multimídia, ou uma lousa digital, projete o tabuleiro. Use o tabuleiro desenhado na lousa, ou projetado, para exemplificar como se marcam pontos no tabuleiro, o modo como eles podem organizar as embarcações nos seus tabuleiros e como darão os tiros para tentar acertar as embarcações no tabuleiro do oponente. Para isso, desenhe uma embarcação em cada quadrante do tabuleiro, explique quais são os pontos que podem atingir essas embarcações. Exemplifique também alguns pontos que não acertam. Faça isso em todos os quadrantes do tabuleiro.
- Depois dessas explicações, proponha que os alunos se organizem em trios para jogar. Sugira que os alunos que se sentem mais seguros quanto à marcação de pontos no plano cartesiano devem se candidatar para serem juízes. Ajude a formar os trios e garanta aos alunos que você os acompanhará no jogo, caso tenham dúvidas. Assim, você gera uma expectativa para a próxima aula.

2.ª aula

- Distribua um tabuleiro para cada aluno e explique que o juiz pode ver o tabuleiro dos dois jogadores. Ele deverá usar um dos planos cartesianos do tabuleiro para marcar os “tiros” dados por um dos jogadores e o outro para marcar os tiros do outro jogador com forma de controle do jogo e para garantir que os jogadores estejam marcando os pontos corretamente. Caso um jogador marque um “ tiro ” de forma incorreta, o juiz deve interferir, fazendo com que o remarque corretamente.
- Leia as [regras do jogo](#) com eles, exemplificando cada uma e tirando as dúvidas que surgirem. Depois de sanadas todas as dúvidas, deixe-os jogarem e observe-os enquanto jogam. Faça intervenções ao observar que os alunos estão marcando os pontos de forma incorreta.

3.ª aula

- A partir das observações que você fez na aula anterior, especialmente a partir dos erros cometidos nas marcações dos pontos, proponha jogar coletivamente o jogo. Desta vez, você jogará contra a turma. Para isso, proceda da seguinte forma: você ancora as embarcações em um tabuleiro a que os alunos não terão acesso; desenha um plano cartesiano no quadro de giz e dá a cada aluno a oportunidade de atirar. Você marca os “tiros” dados pelos alunos e, tendo como referência as embarcações ancoradas no tabuleiro escondido, informa se cada tiro dado acertou

uma embarcação ou se acertou a água. O jogo termina quando os alunos afundarem todas as embarcações. Nessa atividade, todos os alunos estarão atentos às marcações que você fará no sistema de coordenadas cartesianas e farão todos os esforços para “atirar” de modo a atingir as embarcações. Isso pode ajudar os alunos que ainda têm dificuldades para marcar pontos no plano cartesiano.

- Se preferir, você pode inverter a ordem sugerida aqui, ou seja, primeiramente você joga contra a turma e depois os alunos jogam em trios.

4ª aula

- Antes da aula assista e faça *download* do vídeo [Jardim de Números](#) e estude o conteúdo do manual do professor que acompanha o vídeo. Acesse também o [site do Inmetro](#) para obter mais informações sobre as proporções da bandeira brasileira.
- Explique aos alunos que o trabalho com geometria analítica prosseguirá a partir do estudo de um novo vídeo.
- Execute o vídeo [Jardim de Números](#). Ao assistirem esse vídeo os alunos terão a oportunidade de conhecer um pouco sobre a vida e a obra de Roberto Burle Marx, um importante paisagista brasileiro do século XX. Neste vídeo também são usados os termos “abcissa” e “ordenada”. Aproveite para parar o vídeo aos 3 minutos e 6 segundos, logo depois que a personagem usa esses termos. Explique para os alunos que, em um ponto do plano cartesiano, a coordenada x recebe o nome de abcissa do ponto e a coordenada y denomina-se ordenada do ponto. Assim, o eixo x é o eixo das abcissas e o eixo y é o eixo das ordenadas.
- Por meio do conteúdo deste vídeo os alunos também terão oportunidade de rever conteúdos básicos, como plano cartesiano, ponto médio, circunferência e proporção. Neste vídeo também são citadas algumas das aplicações da geometria analítica. Para reforçar esses conceitos:
 - a) pare o vídeo aos 3 minutos e 30 segundos e pergunte aos alunos se eles reconhecem a figura que acabou de ser mostrada. Como o plano cartesiano já foi trabalhado nas aulas anteriores, espera-se que os alunos reconheçam esse plano. Espera-se também que observem que esse plano está restrito ao primeiro quadrante. Caso eles não percebam isso, você pode estabelecer relações entre o

plano cartesiano apresentado no vídeo e o tabuleiro do jogo. Aproveite para perguntar quais semelhanças e diferenças eles percebem entre a figura apresentada no vídeo e o tabuleiro do jogo, a fim de levá-los à reflexão e a concluir que o plano cartesiano apresentado no vídeo está restrito ao primeiro quadrante.

- b) Pare o vídeo aos 5 minutos e 48 segundos para reforçar as informações sobre as proporções da bandeira brasileira, conforme [site do Imetro](#).
- c) Pare o vídeo aos 7 minutos e 8 segundos e chame a atenção dos alunos para o conceito de circunferência citado. Você pode usar um compasso de madeira e construir uma circunferência na lousa. Aproveite para trabalhar com os elementos da circunferência (centro, raio e diâmetro). Enquanto você desenha, perguntar aos alunos que elemento da circunferência está representado pela marca deixada na lousa pela ponta seca do compasso (centro da circunferência), qual o nome da marca deixada pelo giz na lousa ao girar o compasso (circunferência), que elemento da circunferência é o segmento de reta interno à circunferência e que passa pelo seu centro (diâmetro) e, por fim, o que é o segmento de reta que mede metade desse segmento (raio).
- d) Pare o vídeo aos 7 minutos e 37 segundos e informe aos alunos que os dois pontos localizados nos eixos x e y são os pontos médios dos lados do retângulo ($0 + 20/2 = 10$) e ($0 + 14/2 = 7$). A partir dessa demonstração, questione os alunos sobre como podemos conceituar ponto médio.
- Proponha aos alunos que, em duplas, façam o desenho da bandeira brasileira, conforme sugerido no vídeo. Para isso, assegure-se de ter disponíveis para esta aula, para cada dupla, folhas de papel sulfite, régua graduada e compasso. Para mais informações sobre como conduzir esta atividade, consulte o manual do professor que acompanha o vídeo. Acesse esse manual em <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/arquivos/File/manuais/jardimdenumeros.pdf>
- Execute novamente o vídeo “Jardim de números” e, na medida que aparecem informações no vídeo de como desenhar a bandeira brasileira, você pausa o vídeo e anota as informações na lousa. Peça ajuda dos alunos para isso. Essa atitude ajudará os alunos a compreenderem como podem recolher e sistematizar dados a partir de um contexto como o do vídeo. Mas, atenção, as coordenadas do losango não são ditas no vídeo. Essa informação você deve buscar no manual do professor que acompanha o vídeo e fornecer aos alunos.

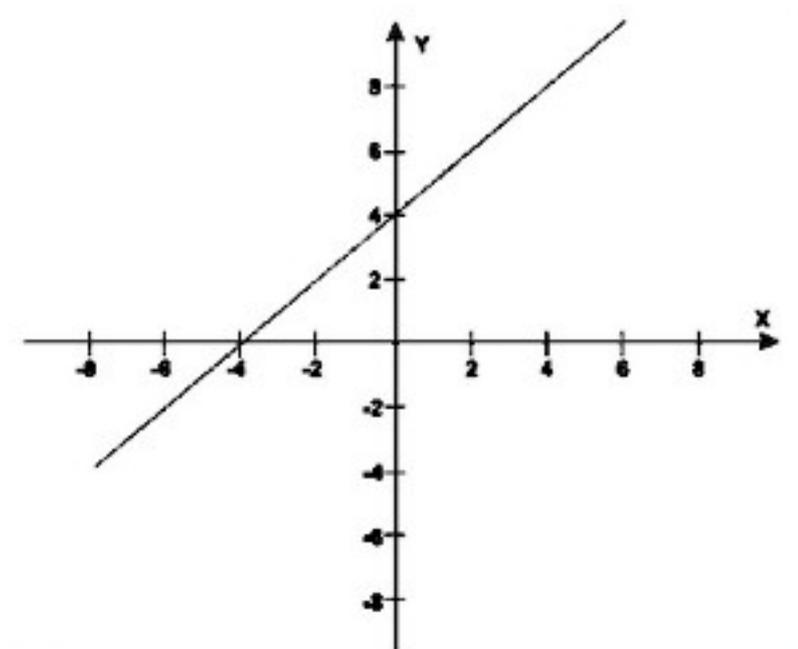
- Conclua explicando como desenhar a faixa na bandeira, usando para isso as orientações do manual do professor que acompanha o vídeo. Esse manual está disponível em:

<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/arquivos/File/manuais/jardimdenumeros.pdf>

5.^a aula

- Inicie a aula fazendo uma síntese do que foi trabalhado nas aulas anteriores. Em seguida, comente que nesta aula eles aprenderão a calcular a distância entre dois pontos marcados nesse plano e que para isso vocês trabalharão com problemas que envolvem esses cálculos.
- Proponha para os alunos o seguinte problema que compôs a prova do ENEM 2011 – Questão 150 – Prova Azul:

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte esse bairro localiza-se no segundo quadrante e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y=x+4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em

linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção no ponto

- A) (-5, 0)
- B) (-3, 1)
- C) (-2, 1)
- D) (0, 4)
- E) (2, 6)

Leia o problema com os alunos e pergunte: quais são os dados fornecidos pelo problema? Quais as condições dadas para resolução? Qual é a questão? O que precisa ser calculado para responder corretamente à questão?

Este é um momento importante para desenvolver a capacidade de leitura e interpretação. Não tenha pressa, insista e aguarde as manifestações valorizando cada contribuição e fazendo as intervenções necessárias quando os alunos tomam um caminho equivocado.

Compreendido o enunciado do problema, peça aos alunos que o representem por meio de um esquema. Como a esta altura os alunos já estudaram o plano cartesiano, espera-se que sejam capazes de representar o ponto dado no enunciado nesse sistema. Espera-se também que sejam capazes de compreender a representação da reta $y=x+4$ nesse mesmo plano.

Dê a eles tempo suficiente para que representem esses elementos, pois a reflexão é um aspecto importante da aprendizagem. Caso não consigam, retome o estudo do plano cartesiano desenhando-o na lousa. Em seguida, pergunte a eles como fariam para saber qual seria a distância do hospital até uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Valorize todas as manifestações dos alunos. Possivelmente eles tentarão resolver o problema por acerto e erro, pois ainda não conhecem a ferramenta que pode ajudá-los no cálculo (distância entre dois pontos no plano cartesiano).

Depois que discutirem um pouco, explique a eles que existe uma ferramenta que pode ajudar a responder ao problema. Diga a eles que a distância entre dois pontos no plano cartesiano é calculada a partir da seguinte fórmula:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Como a distância entre a estação do metrô e o ponto em que fica o hospital não pode ser maior do que 5 km, peça aos alunos que tentem encontrar a alternativa correta a partir dessa informação e usando a fórmula que você acabou de mostrar a eles.

Espera-se que tentem solucionar o problema e valorize todas as tentativas de resolução. É provável que eles tentem resolver usando alguns pontos aleatórios sobre a reta dada. Isso pode funcionar, mas pode levar muito tempo. Então, caso não parta de nenhum aluno da turma, desafie-os a encontrar a solução correta testando os pontos das alternativas na fórmula que você forneceu a eles.

Caso percebam sozinhos, você pode estimulá-los a verificarem se todos os pontos dados nas alternativas estão sobre a reta dada no enunciado, pois aqueles que não estiverem podem ser descartados imediatamente, sem que seja necessário testá-los na fórmula. Isso vai acontecer com as alternativas A e C. Observe que se você substituir x por -5 na equação da reta dada, y será diferente de zero. Então, pode-se descartar o ponto $(-5, 0)$ da alternativa A. Da mesma forma, se você substituir x por -2 na equação da reta dada, y será diferente de 1. Então, pode-se descartar o ponto $(-2, 1)$ da alternativa C. Os alunos podem aplicar este teste para todos os pontos e concluirão que os pontos das alternativas B, D e E estão sobre a reta dada.

Calculando a distância entre o ponto $P = (-5, 5)$ e as alternativas B, D e E, os alunos poderão concluir que a alternativa correta é a B, pois o resultado do cálculo é $\sqrt{20}$ e $\sqrt{20}$ é menor do que 5, pois $\sqrt{25}$ é 5.

Sugestões para o professor

- Após solucionar este problema, seus alunos podem ser desafiados a resolver outros problemas como este, como também resolver problemas e exercícios em contextos puramente matemáticos, dimensão importante.
- Você pode encontrar bons problemas e bons exercícios no livro didático adotado pela sua escola como também em outras fontes disponíveis na biblioteca e na Internet.
- Seguem algumas sugestões de *links* em que podem ser encontrados problemas de aplicação para este conteúdo, materiais para estudo sobre o próprio conteúdo e leituras relativas à resolução de problemas que podem ajudá-lo na condução da resolução do problema sugerido nesta sequência de aulas.

Vídeo: Distância entre dois pontos. Disponível em:
<http://www.warlisson.com.br/exercicios/distancia-entre-dois-pontos-2>

Coordenadas no Plano: Exercícios e problemas. Disponível em:
<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap22.html>

Física e Matemática. Disponível em:
<http://carlamcoelho.blogspot.com.br/2011/09/questoes-resolvidas-plano-cartesiano.html>

Livro: POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. Disponível em:
www.mat.ufmg.br/~michel/inicmat2010/livros/polya.pdf

Artigo PDE: MAIOR, Ludovico; TROBIA, José. **Tendências Metodológicas de Ensino-Aprendizagem em Educação Matemática: Resolução de Problemas- Um Caminho** Disponível em: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1785-8.pdf

TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2. ed. Palhoça: UnisulVirtual. Disponível em: busca.unisul.br/pdf/89279_Diva.pdf

Geometria Plana: Geometria Analítica Plana. Disponível em:
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/ganalitica/ganalitica.htm>

Distância entre dois pontos. Disponível em:
<http://www.brasilecola.com/matematica/distancia-entre-dois-pontos.htm>

8. Relações interdisciplinares

Esta sequência de aulas tem aproximações com Geografia, na medida em que os alunos aprenderão a marcar pontos em sistemas de coordenadas cartesianas e que esse conhecimento é útil para localização de coordenadas no espaço geográfico.

A Física se utiliza do plano cartesiano e do cálculo da distância entre dois pontos em problemas de deslocamento.

A sequência tem também aproximações com a arte, na medida em que um dos vídeos aborda a técnica do pontilhismo criada pelo pintor francês Georges Seurat (1859–1891).

9. Aprendizagem esperada

Espera-se que após esta sequência de aulas os alunos sejam capazes de localizar e marcar pontos em um sistema de coordenadas cartesianas bem como calcular a distância entre dois pontos em um plano cartesiano para resolver problemas contextualizados.

10. Referências

RICHIT, Adriana. **Projetos em Geometria Analítica usando Software de Geometria Dinâmica**: Repensando a Formação Inicial Docente em Matemática. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro/SP: Unesp, 2005. 169 p.

SANTOS, Ricardo de Souza. **Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de geometria analítica**: manipulações no software Grafeq. Porto Alegre: UFRGS, 2008. 136 p.