Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Vou de Taxi

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Utilizar coordenadas cartesianas no plano introduzindo uma nova noção de distância onde a função módulo aparece de forma natural.
2. Apresentar a Geometria do Táxi.
3. Comparar a distância euclidiana e a distância do taxi usando coordenadas.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Vou de Taxi

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Números, valor absoluto de números reais.
Geometria, sistema de coordenadas cartesianas ortogonal.
Geometria, distâncias.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
Utilizar coordenadas cartesianas no plano introduzindo uma nova noção de distância onde a função módulo aparece de forma natural.
Comparar a distância euclidiana e a distância do taxi usando coordenadas.

Sinopse

Sinopse

A personagem Luciana requisita os serviços do motorista de taxi Wandercy, pedindo que vá buscá-la utilizando o caminho mais curto. Wandercy esclarece que ao viajar de carro nem sempre a linha reta é o menor caminho devido à necessidade de seguir o traçado das ruas. Ele apresenta para Luciana a Geometria do Taxi e mostra a relação entre a distância euclidiana e a distância do taxi.

Material relacionado
Áudios: ;
Experimentos: Taxi e Combinatória;
Softwares: Geometria do Taxi - Distância; Geometria do Taxi - Contagem; Geometria do Taxi - Formas Geométricas.
Vídeos: .; .

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

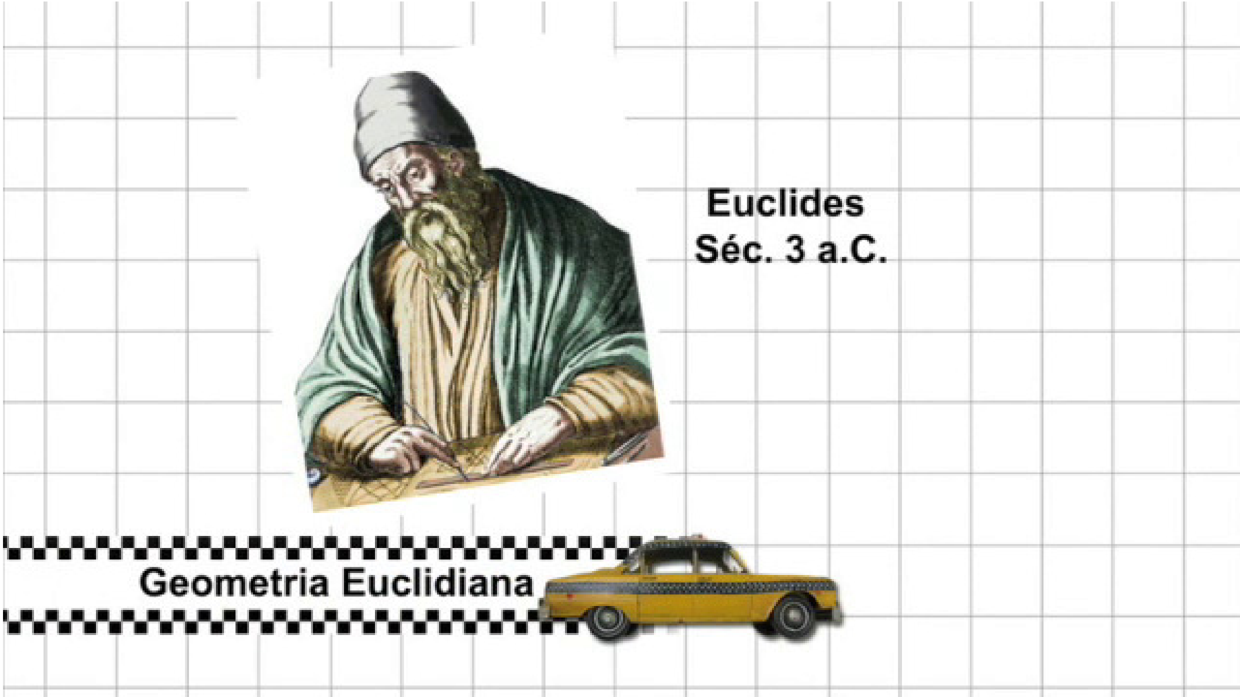
Sobre o programa

A personagem Luciana requisita os serviços do motorista de taxi Wandercy, pedindo que vá buscá-la no aeroporto utilizando o caminho mais curto. Wandercy esclarece que ao viajar de carro nem sempre a linha reta é o menor caminho devido à necessidade de seguir o traçado das ruas. Ele apresenta para Luciana a Geometria do Taxi e mostra a relação entre a distância euclidiana e a distância do taxi.

Wandercy está em uma oficina mecânica quando Luciana lhe telefona. Eles conversam sobre distâncias e trajetos mais curtos. Isto faz Wandercy se lembrar de seu tempo de professor de geometria em que falava aos seus alunos da Geometria Euclidiana e sobre o matemático grego Euclides que viveu no século III a.C.

Um pouco da história

Euclides (aprox. 325 a.C. – 265 a.C.) notável matemático é conhecido por sua obra *Os Elementos*. Esta obra consiste de treze livros e reúne grande parte do conhecimento matemático de sua época sobre os temas: geometria plana, construções geométricas, teoremas de congruência, áreas de polígonos, Teorema de Pitágoras, estudo do círculo, problemas relativos à construção de alguns polígonos regulares, proporções, semelhança de figuras, teoria dos números, incomensurabilidade, geometria espacial e poliedros regulares.



A característica importante dos *Elementos* é sua organização, objetividade e clareza nas demonstrações dos teoremas e o caráter lógico-dedutivo.

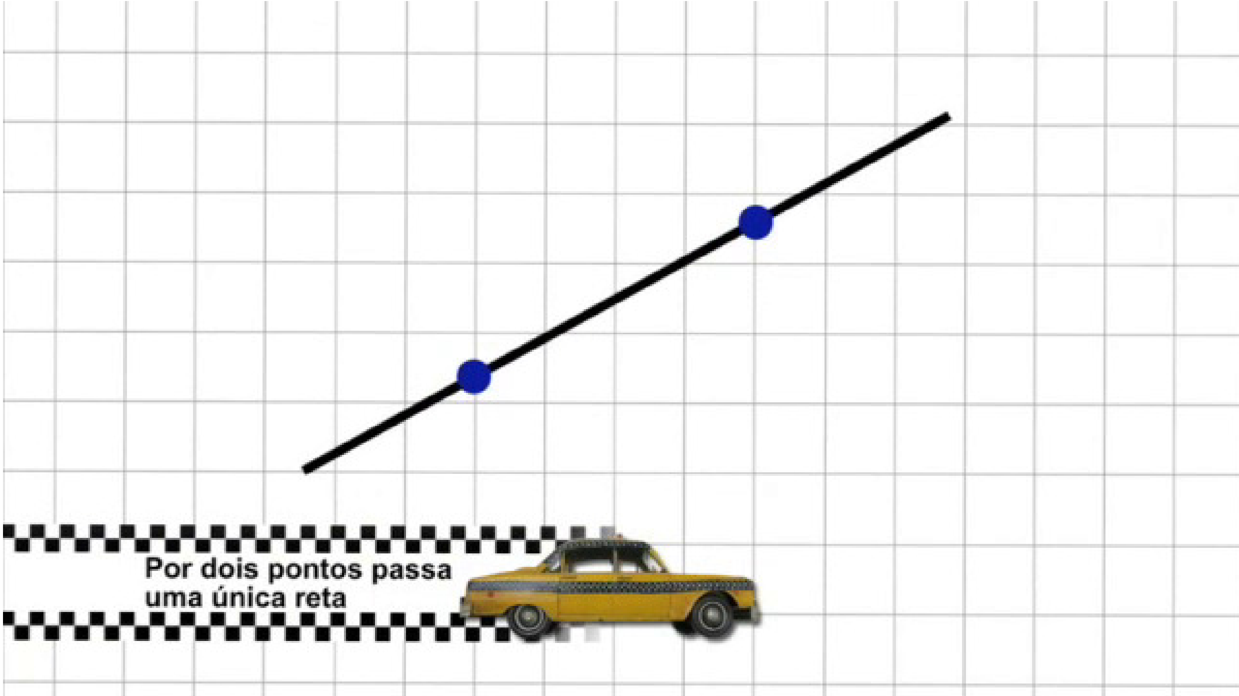
Euclides inicia sua obra usando definições, 5 postulados e 5 axiomas ou noções comuns.

Para Euclides, os postulados eram afirmações referentes à geometria plana, enquanto que, os axiomas, ou noções comuns, eram afirmações gerais aceitas em outros campos, como por exemplo, *o todo é maior do que as partes.* Nos dias atuais não existe distinção entre os significados das palavras axioma e postulado.

A partir das afirmações iniciais e por meio de deduções lógicas são demonstrados os teoremas.

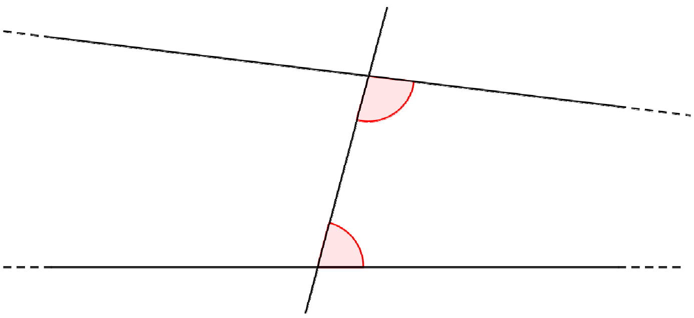
O primeiro postulado considerado por Euclides foi:

> *É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer.*



O quinto postulado é o mais famoso dos postulados de Euclides e é conhecido como o Postulado das Paralelas. As muitas análises e questionamentos a respeito desse postulado proporcionaram o conhecimento mais amplo da geometria euclidiana culminando com o surgimento de novas geometrias além de acarretar o entendimento das implicações decorrentes do método axiomático.

> ***Quinto Postulado de Euclides****. Se uma reta, intersectando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.*



Desde a antiguidade até aproximadamente o século XVIII vários matemáticos achavam que o quinto postulado de Euclides pudesse ser demonstrado a partir dos outros postulados de Euclides e muitas tentativas neste sentido foram feitas, mas todas sem êxito.

Entretanto, embora sem êxito, essas tentativas de prova do quinto postulado proporcionaram, no século XIX, o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas. Em 1829, Lobachevsky publicou um artigo, *Sobre os Princípios da Geometria*, o qual marca o nascimento oficial da Geometria não-Euclidiana.

Além disso, os matemáticos perceberam que a axiomática de Euclides estava incompleta. Em 1889, o matemático de David Hilbert (1862-1943) apresentou em seu livro *Fundamentos da Geometria* um tratamento axiomático rigoroso da Geometria Euclidiana.

No final do século XVIII, o quinto postulado passou a ser substituído por um enunciado equivalente e mais claro, proposto em 1796 pelo matemático inglês John Playfair:

> *"Dada uma reta e um ponto não pertencente a esta reta, existe uma única reta passando pelo ponto e paralela a reta dada."*

A duas possíveis negações do Postulado das Paralelas resultam em duas diferentes geometrias não-Euclidianas: hiperbólica e elíptica. Considerando a forma equivalente do quinto postulado devido a Playfair as duas negações são:

Postulado Hiperbólico: Por um ponto, não pertencente a uma dada reta, passam no mínimo duas retas paralelas a dada reta.

Postulado elíptico: Duas retas sempre se intersectam.

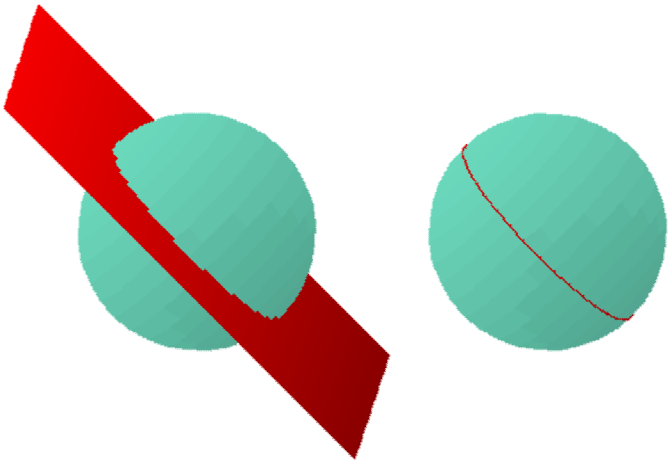
A Geometria elíptica é uma geometria não euclidiana e desenvolvida considerando um sistema de postulados do qual o postulado elíptico faz parte. Um modelo para esta geometria é a Geometria Esférica.

No vídeo Wandercy conta para Luciana que devido a fatos históricos e necessidades práticas outras geometrias foram desenvolvidas.

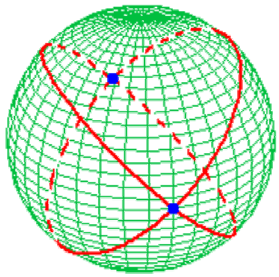
Também, a descoberta de que a Terra é redonda proporcionou o avanço dos estudos da Geometria Esférica.

Geometria Esférica

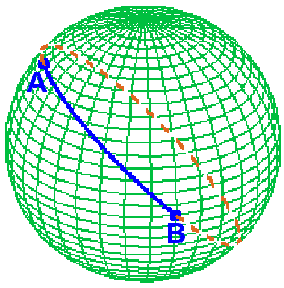
A Geometria Esférica pode ser vista como o estudo de figuras na superfície de uma esfera. Os pontos desta geometria são os pontos na superfície esférica, e as retas são circunferências máximas. Uma circunferência máxima (ou geodésica) é a intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo centro da esfera.



Note que duas retas quaisquer na geometria esférica, ou seja, duas circunferências máximas, intersectam-se em dois pontos. Assim, o postulado elíptico é satisfeito.



A distância entre dois pontos sobre a superfície esférica é o comprimento do menor arco da circunferência máxima passando pelos dois pontos. A distância entre os pontos A e B da ilustração é o comprimento do arco azul, isto é, do menor arco ligando os pontos A e B e contido na circunferência máxima passando pelos pontos A e B.



A Geometria Esférica desenvolveu-se desde a antiguidade para atender as necessidades de astrônomos e devido às inúmeras aplicações nas navegações.

Diante do interesse da Luciana em caminhos mais curtos, Wandercy lhe mostra algumas propriedades da distância euclidiana que a caracteriza como uma métrica.

A Geometria Euclidiana Plana, o sistema de coordenadas e a métrica euclidiana

A abordagem algébrica da Geometria Euclidiana teve seu início com o trabalho *La Géomètrie* do matemático René Descartes (1596-1650). Este trabalho foi publicado em 1637 no apêndice de seu livro *Discours de la Méthode (O Discurso sobre o Método)*. Também, o matemático

Pierre Fermat (1601-1665) fez importantes contribuições para as idéias iniciais relacionando a álgebra e a geometria que foram publicadas somente após a sua morte em 1769. As palavras coordenadas, abscissa e ordenada foram contribuições de Leibniz em 1692. Estes trabalhos deram origem ao que hoje conhecemos como Geometria Analítica.

Na abordagem algébrica da geometria euclidiana plana, os pontos são pares ordenados (x, y) onde x e y são números reais e as retas são definidas como sendo os conjuntos soluções das equações da forma $ax + by + c = 0$, com a, b e c números reais e $(a, b) \neq (0,0)$. O plano e seus pontos podem ser visualizados por meio da representação em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

A função distância euclidiana, que denotamos d_E, é definida por:

Para os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$,

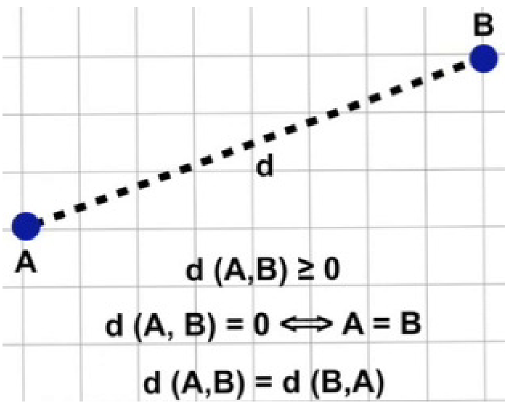
$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

A função d_E satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_E(A, A) = 0$;

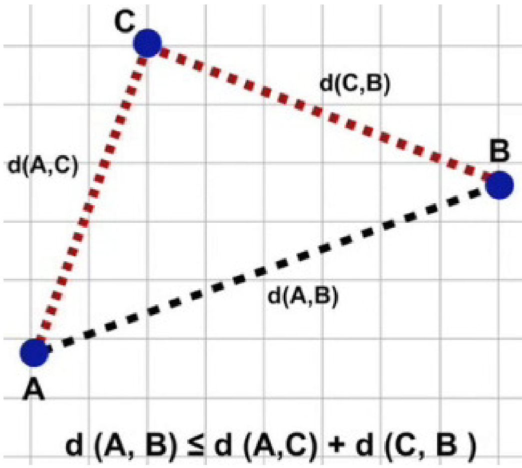
ii) Se $A \neq B$ então $d_E(A, B) > 0$;

iii) $d_E(A, B) = d_E(B, A)$;



iv) $d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_E(C,B)$, para quaisquer pontos A, B e C. (Desigualdade Triangular).

Observação: Geometricamente a propriedade (iv) significa que o comprimento de qualquer um dos lados de um triângulo é menor do que ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados. No final deste guia, a sequência de passos da atividade 3 na seção *Após a Execução* constitui uma forma para mostrar algebricamente esta propriedade a partir da definição de distância euclidiana.



Uma função como a distância d_E que satisfaz as propriedades i, ii, iii e iv é chamada métrica.

A métrica euclidiana é adequada em muitas situações, mas não é apropriada para calcular a distância a ser percorrida entre duas localidades de uma cidade. A menor distância para irmos de uma localidade a outra depende das ruas de possíveis trajetos e na maioria das vezes não podemos ir seguindo uma linha reta de um ponto a outro.

No vídeo, Wandercy apresenta a métrica do taxista que é apropriada para calcular comprimentos de trajetos a serem percorridos entre localidades da cidade dos personagens. A geometria determinada pela métrica do taxista é chamada Geometria do Taxi.

Geometria do Taxi

Na Geometria do Taxi, os pontos e as retas são os mesmos da Geometria Euclidiana. Também, os ângulos são medidos do mesmo modo. Apenas a função distância é definida de modo diferente.

A função distância do taxi, denotada d_T, é definida por:

Para os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$,

$$d_T(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$

A função d_T satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_T(A, A) = 0$;

ii) Se $A \neq B$ então $d_T(A, B) > 0$;

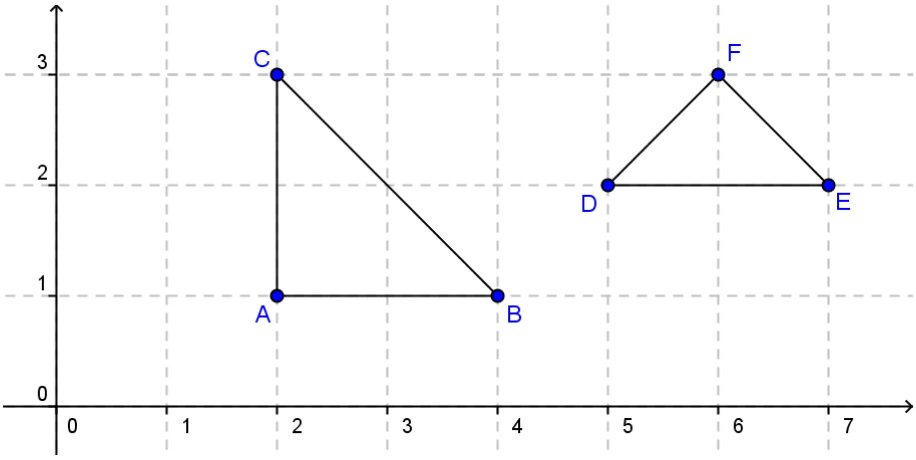
iii) $d_T(A, B) = d_T(B, A)$;

iv) $d_T(A, B) \leq d_T(A, C) + d_T(C, B)$, para quaisquer pontos A, B e C.

Assim, a função distância do taxi d_T é uma métrica. Esta métrica foi introduzida pelo matemático alemão Hermann Minkowski (1864-1909).

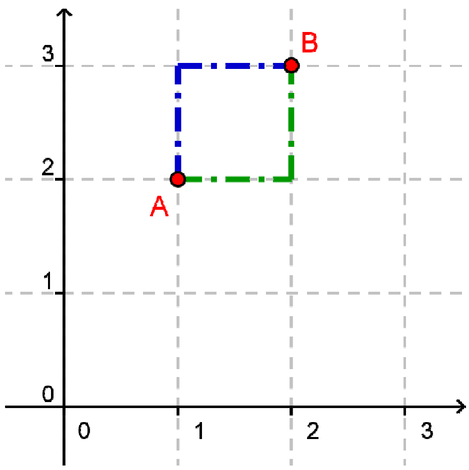
Sobre os axiomas da Geometria do Taxi

Na Geometria do Taxi valem todos os axiomas da Geometria Euclidiana com exceção do postulado L.A.L (Lado-Ângulo-Lado). Para ver isto, considere os pontos $A = (2,1)$, $B = (4,1)$, $C = (2,3)$, $D = (5,2)$, $E = (7,2)$ e $F = (6,3)$. Os triângulos retângulos BAC e DEF são retângulos e isósceles, mas não satisfazem o Postulado LAL, pois o triângulo BAC tem dois lados com medidas do taxi iguais a 2 e a hipotenusa igual a 4, e o triângulo DEF tem os três lados de medidas do taxi iguais a 2. Note que os dois triângulos possuem dois lados com medida do taxi igual a 2 e o ângulo entre esses lados medindo 90 graus, mas não são congruentes pois os terceiros lados têm medidas (do taxi) diferentes.



Geometria do Taxi e a Geometria Urbana

Imagine uma cidade ideal onde as ruas podem ser representadas pelas retas horizontais e verticais de uma malha quadriculada em um plano cartesiano ortogonal, como mostra a ilustração. Nesta representação, chamamos de quarteirão a distância entre uma esquina e outra mais próxima. Para um motorista de taxi trafegar do ponto $A = (1,2)$ ao ponto $B = (2,3)$ utilizando um caminho mais curto existem duas possibilidades, as quais estão representadas em azul e verde. Os dois trajetos mais curtos são formados por dois quarteirões.

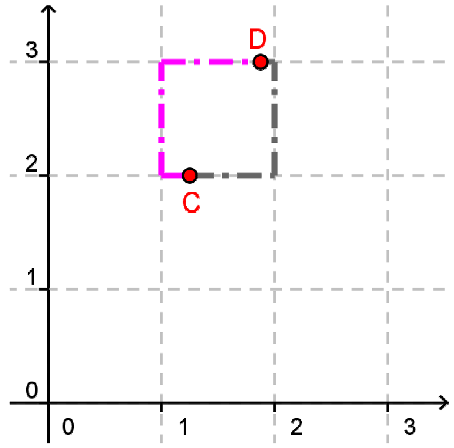


A distância do taxi entre os pontos A e B é dada por:

$$d_T(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = |1-2| + |2-3| = 2.$$

Nesta situação, o comprimento de qualquer trajeto mais curto entre os pontos A e B e a distância do taxi são iguais.

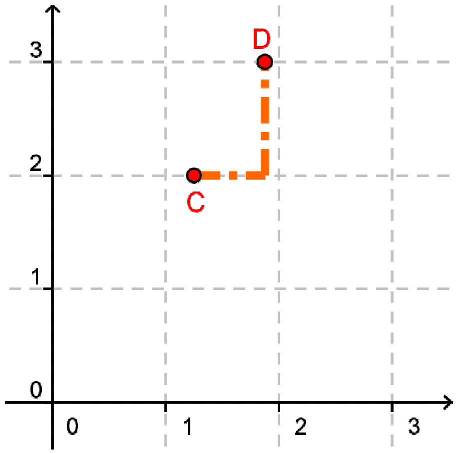
Agora imagine que o motorista de taxi está no ponto $C = \left(\frac{5}{4}, 2\right)$ e deseja ir até o ponto $D = \left(\frac{15}{8}, 3\right)$, ilustrados a seguir. O trajeto mais curto de C até D é o menor entre os trajetos rosa e cinza da ilustração. O comprimento do caminho rosa é igual a $\left(\frac{5}{4} - 1\right) + 1 + \left(\frac{15}{8} - 1\right) = \frac{17}{8}$ e o comprimento do caminho cinza é igual a $\left(2 - \frac{5}{4}\right) + 1 + \left(2 - \frac{15}{8}\right) = \frac{15}{8}$. Assim, o trajeto mais curto é o cinza.



A distância do taxi entre os pontos C e D é dada por:

$$d_T(C, D) = |x_C - x_D| + |y_C - y_D| = \left|\frac{5}{4} - \frac{15}{8}\right| + |2 - 3| = \frac{13}{8}.$$

Note que, esta distância corresponde à soma das medidas dos dois segmentos na cor laranja na ilustração seguinte. Mas, o motorista de taxi não pode para ir de C até D por um trajeto como este, pois precisa seguir pelo traçado das ruas.

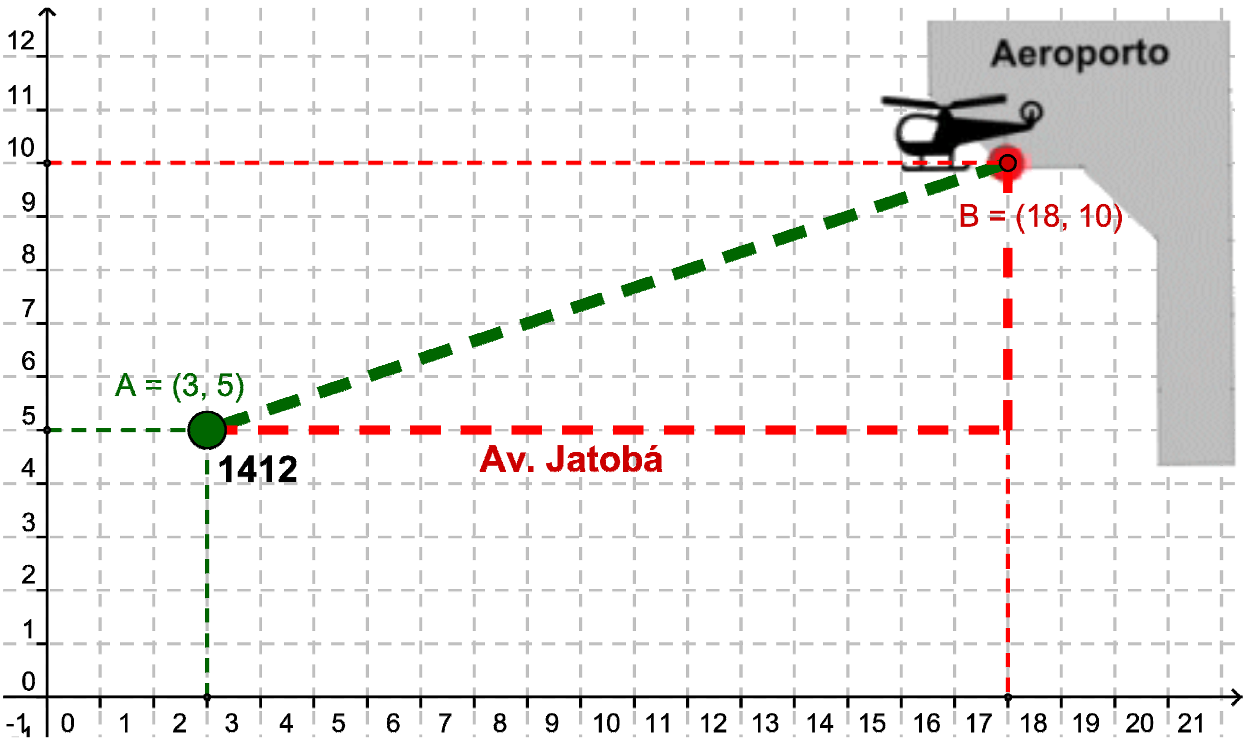


Por meio dos exemplos acima podemos ver que para pontos de coordenadas inteiras a medida de um menor trajeto entre dois pontos é igual à distância do taxi entre esses pontos. Assim, embora na Geometria do Taxi os pontos são todos os pontos do plano cartesiano, quando restrita aos pontos de coordenadas inteiras ela descreve bem a geometria urbana de uma cidade ideal. A aplicação destas idéias em problemas relacionados a trafegar por ruas justifica o nome Geometria do Taxi.

Na situação apresentada no vídeo, Luciana está no aeroporto que no mapa da cidade corresponde ao ponto $B = (B_x, B_y) = (18{,}10)$ e deseja ir em uma reunião que acontecerá no número 1412 da Rua Jatobá que corresponde ao ponto $A = (A_x, A_y) = (3{,}5)$. Como as coordenadas dos pontos A e B são números inteiros, a distância que o motorista de taxi deverá percorrer é dada pela métrica do taxi:

$$d_T(A, B) = |A_x - B_x| + |A_y - B_y| = |3 - 18| + |5 - 10| = 20.$$

No mapa cada unidade representa um quarteirão que tem 100 metros. Assim, a distância do aeroporto até o número 1412 da Rua Jatobá é igual a 20 quarteirões $\times$ 100m = 2000m, ou seja, 2km.



Relação entre a distância do taxi e a distância euclidiana

A distância do taxi é sempre maior do que ou igual à distância euclidiana.

Para verificar esta afirmação, considere os pontos $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ e a desigualdade

$$2\,|x_A-x_B|.\,|y_A-y_B|\geq 0.$$

Somando $(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$ aos dois membros desta desigualdade obtemos

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+2|x_A-x_B|.|y_A-y_B|\geq(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2.$$

Logo,

$$(|x_A-x_B|+|y_A-y_B|)^2\geq(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2.$$

Como os dois membros desta desigualdade são maiores do que ou iguais a zero, extraindo a raiz quadrada dos dois membros a desigualdade continua válida, ou seja,

$$\sqrt{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)^2} \geq \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Portanto, $|x_A - x_B| + |y_A - y_B| \geq \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, ou seja,

$$d_T(A, B) \geq d_E(A, B).$$

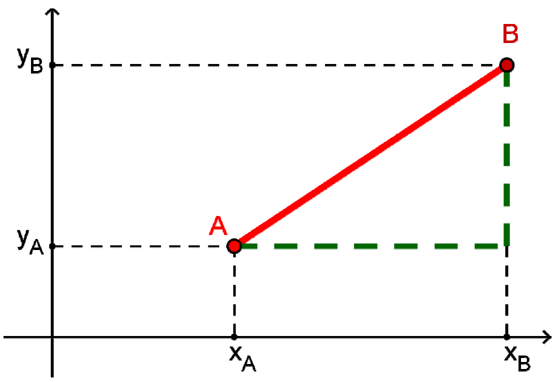
Sugestões de atividades

Antes da execução

Propor aos alunos a seguinte questão:

Utilizando o Teorema de Pitágoras, verificar que a distância euclidiana entre os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ em um plano cartesiano é dada por

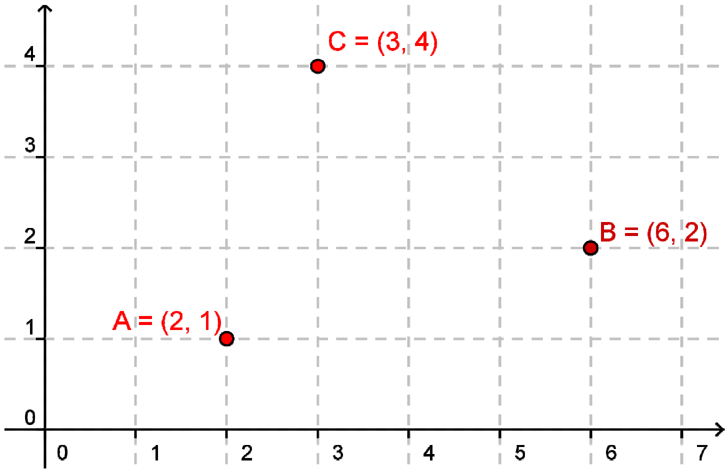
$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$



Depois da execução

Atividade 1

a) Para os pontos A, B e C da figura, traçar um caminho mais curto, seguindo o traçado das ruas, entre as seguintes localidades: i) A e B; ii) A e C; iii) C e B. Também, contar o número de quarteirões para se deslocar de uma localidade a outra de cada um dos itens. (Observação: um quarteirão é a extensão de uma esquina e outra mais próxima.)



Utilizando a fórmula da distância do taxi, calcular $d_T(A,B)$, $d_T(A,C)$ e $d_T(C,B)$, e comparar com o número de quarteirões de cada um dos itens anteriores.

b) Qual é a relação entre $d_T(A,B)$ e $d_T(A,C) + d_T(C,B)$.

c) Verificar que para quaisquer três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, vale a propriedade

$$d_T(A,B) \leq d_T(A,C) + d_T(C,B),$$

onde d_T é a função distância do taxi.

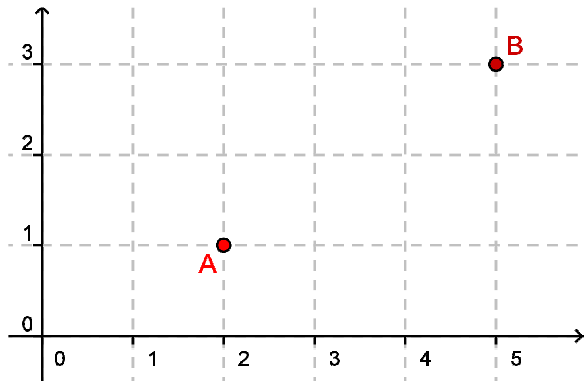
(Sugestão: utilizar a fórmula da distância do taxi e a desigualdade triangular para números reais, ou seja: para quaisquer números reais x e y vale $|x+y| \leq |x| + |y|$. Por exemplo, devido a esta desigualdade podemos escrever

$$|x_A - x_B| = |x_A - x_C + x_C - x_B| \leq |x_A - x_C| + |x_C - x_B|.)$$

Atividade 2

a) A figura representa o mapa das ruas de um bairro de uma cidade, onde estão marcadas duas localidades A e B. Determine a distância do taxi para ir de A até B. Desenhe um caminho com esta distância.

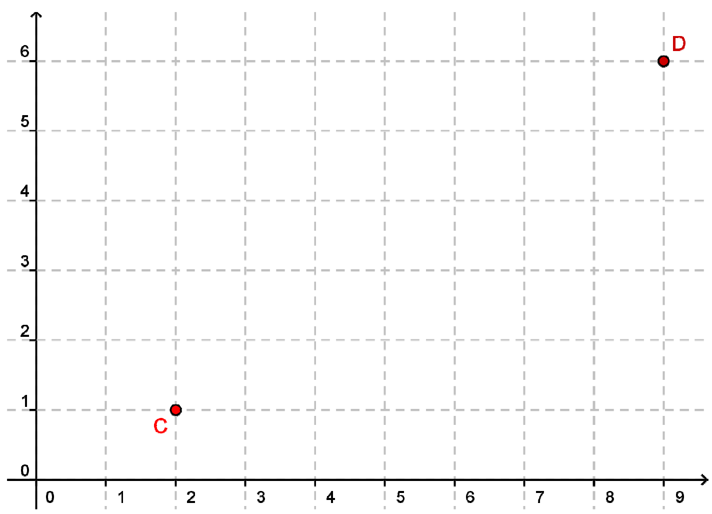
Quantos caminhos diferentes e mais curtos existem para ir de A para B?



Tente encontrar uma fórmula para o número de diferentes caminhos mais curtos usando o conceito de combinação. (ver o guia do software *Geometria do Taxi – Contagem* do projeto Matemática Multimídia - M^3.)

b) Na figura a seguir, qual é a distância do taxi entre C e D? Desenhe um caminho com esta distância.

Qual é o número de caminhos diferentes e mais curtos entre C e D?



Atividade 3

Propor aos alunos a seguinte sequência de questões com o objetivo de mostrar algebricamente a desigualdade triangular

$$d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_E(C,B),$$

para quaisquer pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, onde d_E é a função distância euclidiana.

i) Para quaisquer números reais a, b, c, d, mostre que

$$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2.$$

ii) Mostre que, para a, b, c, d números reais, vale

$$ac + bd \leq |ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}.$$

(Sugestâo: note que o primeiro e segundo membros da segunda desigualdade são números reais positivos, assim, esta desigualdade é equivalente a $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2).(c^2 + d^2)$)

iii) Mostrar que $d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_E(C,B)$ para quaisquer pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, onde d_E é a função distância euclidiana. (Desigualdade triangular)

(Sugestão: como os dois membros da desigualdade triangular são positivos, ela é equivalente a desigualdade $\left(d_E(A,B)\right)^2 \leq \left(d_E(A,C) + d_E(C,B)\right)^2$. Assim, desenvolva o segundo membro desta última desigualdade, use a definição da distância euclidiana, tome $a = x_A - x_c$, $b = y_A - y_c$, $c = x_C - x_B$, $d = y_C - y_B$ e utilize a desigualdade $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$ do item anterior.)

Sugestões de leitura

ÁVILA, Geraldo. *Euclides, Geometria e Fundamentos.* Revista do Professor de Matemática, no. 45, p. 01-09. São Paulo: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 3*. Coleção do Professor de Matemática, (3ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

KRAUSE, Eugene F. *Taxicab Geometry.* New York: Dover, 1986.

VELOSO, Eduardo. *Geometria: Temas Actuais. Materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.

Ficha técnica

Autora: *Claudina Izepe Rodrigues*
Revisor: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*