Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

Você disse Cristalografia?

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Mostrar a forma geométrica de alguns cristais.
2. Analisar eixos de simetrias de alguns cristais.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Você disse Cristalografia?

Série

Matemática na Escola

Conteúdos
Formas geométricas e simetrias.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Mostrar a forma geométrica de alguns cristais.
2. Analisar eixos de simetrias de alguns cristais.

Sinopse
Paulo Andrade é jornalista e apresentador de televisão. Em seu programa de entrevistas *Conversas Noturnas* ele recebe o professor Henrique Onero para uma conversa sobre cristalografia, o estudo dos cristais. Henrique fala sobre as formas geométricas e os eixos de simetrias que constituem características básicas para a classificação dos cristais.

Material relacionado
Experimentos: *Espelhos e simetrias;*
Vídeos: *Naturalmente.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

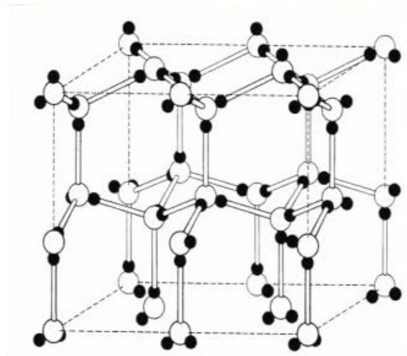
Sobre o programa

Paulo Andrade é jornalista e apresentador de televisão. Em seu programa de entrevistas *Conversas Noturnas* ele recebe o professor Henrique Onero para uma conversa sobre cristalografia. Henrique fala sobre as formas geométricas e as simetrias que constituem as características básicas para a classificação dos cristais.

No vídeo são citados os sete sistemas cristalinos que são identificados em função das características básicas dos cristais e são apresentados exemplos de alguns cristais.

Cristalografia significa o estudo dos cristais. No vídeo são apresentados alguns aspectos geométricos dos cristais.

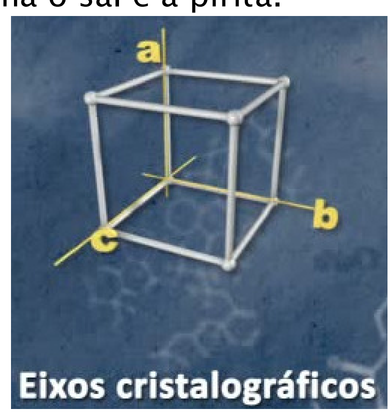
Um cristal apresenta uma forma poliédrica, limitado por faces planas, devido a sua composição química e à ação interatômica, desde que, a passagem do estado líquido ou gasoso para o estado sólido ocorra em condições ambientais adequadas à sua formação. Muitas vezes não apresenta a forma poliédrica devido às condições de crescimento e o desgaste pela erosão e pelo atrito.



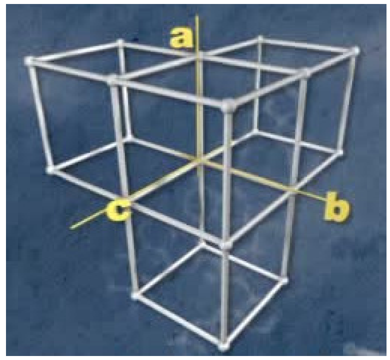
Eixos cristalográficos e sistemas cristalinos

Um cristal é formado por unidades denominadas células unitárias (menor componente de um cristal) em um arranjo tridimensional ordenado. Podemos imaginar uma célula unitária que se repete por translações em três direções distintas formando um reticulado. Os comprimentos destas translações e os ângulos entre as direções das translações determinam os eixos cristalográficos. Em função das características dos eixos cristalográficos os cristais são classificados em sete sistemas cristalinos.

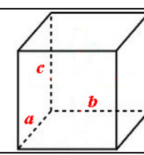
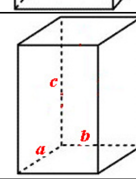
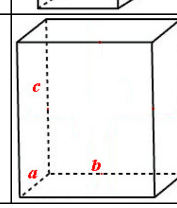
Um desses sistemas é o sistema cúbico onde a célula unitária tem a forma cúbica e os três eixos cristalográficos (a, b, c) são de mesmo tamanho formando ângulos de 90 graus dois a dois. Por exemplo, pertencem a este sistema o sal e a pirita.

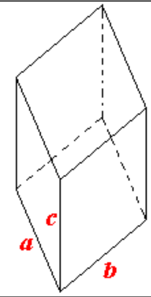
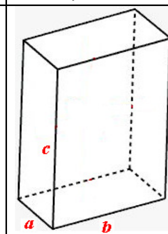
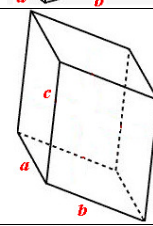
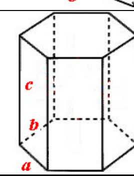


A célula unitária se repete na direção dos eixos cristalográficos formando um reticulado.



A classificação principal dos cristais baseia-se nos sistemas cristalinos que dependem da forma assumida pelo cristal. São 7 os sistemas cristalinos: cúbico, tetragonal, ortorrômbico, trigonal ou romboédrico, monoclínico, triclínico e hexagonal. A tabela que segue apresenta os 7 sistemas cristalinos e suas principais características.

SISTEMA	**Sólido Fundamental**	**Eixos cristalográficos**	**Ângulos entre eixos cristalográficos** α - ângulo entre os eixos *a* e *c* β - ângulo entre os eixos *b* e *c* γ - ângulo entre os eixos *a* e *b*	**Modelo**
Cúbico (isométrico)	Hexaedro regular (cubo)	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	
Tetragonal	Prisma tetragonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	
Ortorrômbico	Paralelepípedo regular reto	$a \neq b \neq c$ *(todos diferentes)*	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	

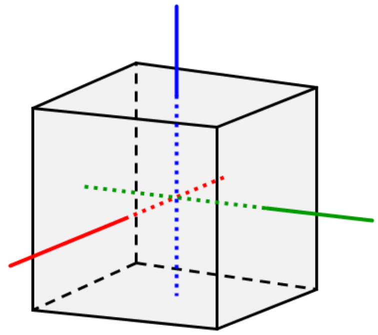
Trigonal ou romboédrico	Romboedro	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	
Monoclínico	Paralelepípedo	$a \neq b \neq c$ *(todos diferentes)*	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	
Triclínico	Paralelepípedo	$a \neq b \neq c$ *(todos diferentes)*	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$ *(todos diferentes)*	
Hexagonal	Prisma hexagonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	

Os cristais também são identificados em função de suas simetrias. Nos cristais do sistema cristalino cúbico podem estar presentes os eixos de simetrias do cubo.

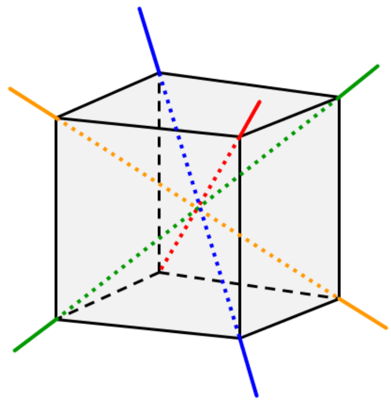
Eixos de simetria do cubo

O cubo possui:

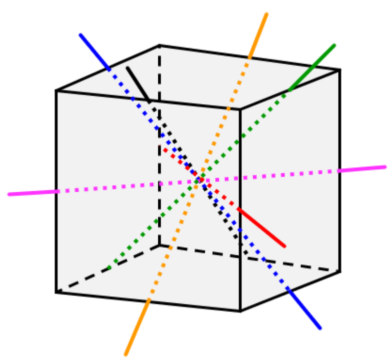
- Três eixos de simetria de 90 graus ligando os centros de faces opostas.



- Quatro eixos de simetria de 120 graus ligando um vértice e o seu vértice oposto.



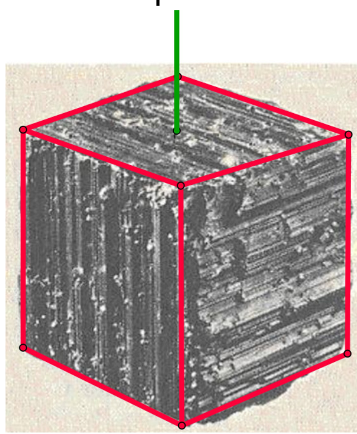
- Seis eixos de simetria 180 graus ligando o ponto médio de uma aresta e o ponto médio de sua aresta oposta.

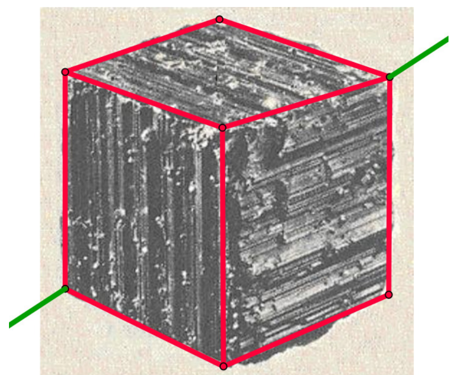


Sobre eixos de simetrias dos cristais

Vários cristais pertencem ao sistema cúbico: pirita, cobre, galena, ouro, prata, diamante, pirita, cloreto de sódio, etc. Um sistema cristalino é subdividido em classes que dependem das simetrias apresentadas. Uma classe de simetria é chamada holoédrica quando possui todas as simetrias do sistema cristalino a que pertence. E, a classe é chamada hemiédrica quando não possui todas as simetrias do sistema a que pertence. Por exemplo, no sistema cúbico, a classe holoédrica é a que apresenta todas as simetrias do cubo (reflexão, rotação, simetria central).

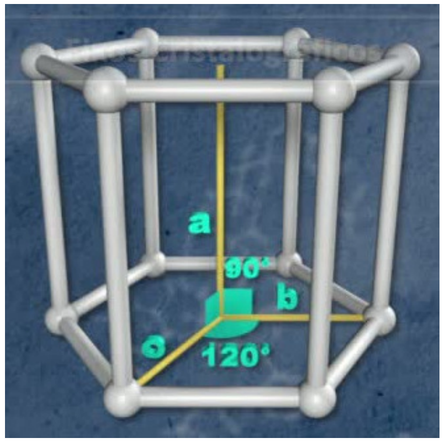
O cristal pirita pode ser encontrado na forma de um cubo. Mas como suas faces apresentam estrias paralelas às arestas do cubo, a pirita não possui todos os eixos de simetrias do cubo. Por exemplo, o eixo determinado pelos centros de faces opostas é um eixo de simetria de 90 graus do cubo, mas não é um eixo de simetria de 90 graus do cristal de pirita. O eixo ligando as extremidades de uma diagonal de um cristal de pirita é um eixo de simetria de 120 graus.





O cristal de galena e a pirita pertencem ao mesmo sistema, ou seja, cúbico. Mas estes cristais pertencem a classes diferentes, pois a galena possui um grau maior de simetrias.

No vídeo também é comentado sobre a forma dos cristais do sistema hexagonal. Os cristais classificados neste sistema apresentam a forma poliédrica de um prisma hexagonal e dois dos eixos cristalográficos são iguais formando um ângulo de 120 graus e o terceiro eixo cristalográfico forma ângulo de 90 graus com cada um dos eixos anteriores.

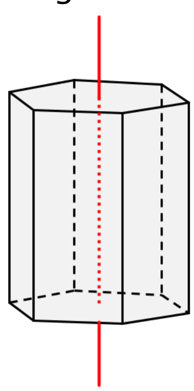


A esmeralda é um cristal classificado neste sistema. Nos cristais do sistema hexagonal ocorrem simetrias entre as do prisma hexagonal.

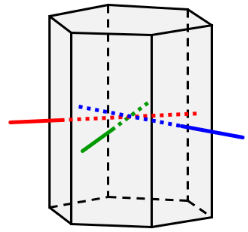
Eixos de simetria do prisma hexagonal

O prisma hexagonal reto possui:

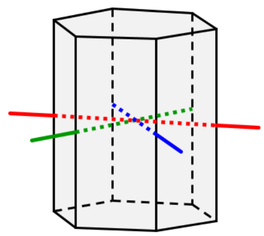
- Um eixo de simetria de 60 graus ligando o centro do hexágono da base e o centro do hexágono do topo.



- Três eixos de simetria de 180 graus ligando os centros de faces laterais opostas.

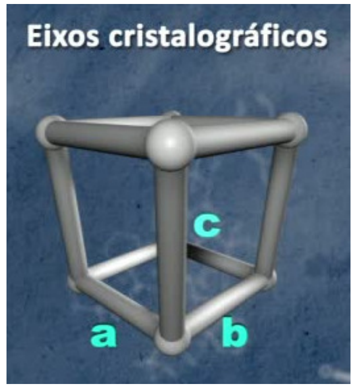


- Três eixos de simetria de 180 graus ligando os pontos médios de arestas laterais opostas.



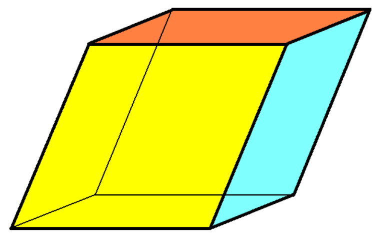
No vídeo o professor Onero comenta sobre o cristal calcite que pertence ao sistema cristalino romboédrico ou trigonal.

As faces das formas poliédricas dos cristais deste sistema são losangos e os 3 eixos cristalográficos são iguais formando, dois a dois, ângulos diferentes de 90 graus.



Nos cristais deste sistema ocorrem simetrias entre as do romboedro.

Eixos de simetria do romboedro



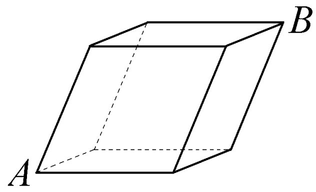
Um romboedro é um paralelepípedo limitado por seis faces losangulares tais que os pares de faces opostas são congruentes. Quando as seis faces são congruentes ele é denominado romboedro trigonal. Um romboedro tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

Como o quadrado também é um losango onde os ângulos são retos, o cubo é um caso especial de romboedro.

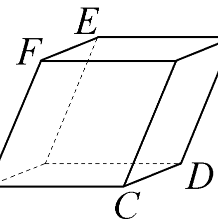
No que segue, analisaremos os eixos de simetria de romboedros em que todas as faces são congruentes e os ângulos de cada face são diferentes de 90 graus. Assim, cada losango da face possui dois pares de ângulos congruentes sendo um par de ângulos agudos e o outro par de ângulos obtusos.

Em torno de cada vértice encontram-se 3 faces (losangos) e existem 2 tipos de vértices:

Tipo 1: vértices em que os 3 losangos se encontram por um de seus ângulos agudos. Existem 2 vértices deste tipo. Na ilustração, os vértices A e B são do tipo 1.

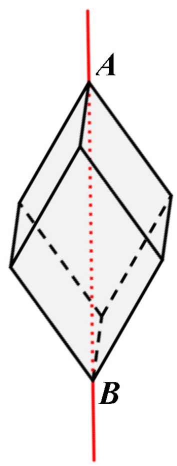


Tipo 2: vértices em que um dos losangos se encontra por um de seus ângulos agudos e os outros dois losangos por ângulos obtusos. Existem 6 vértices deste tipo. Na ilustração, os vértices *C*, *D*, *E* e *F* são do tipo 2.

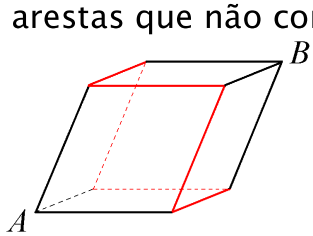


O romboedro possui:

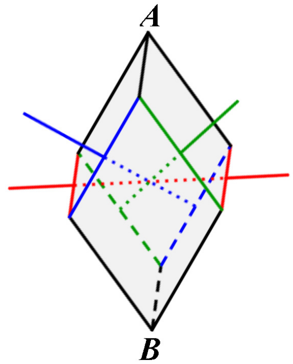
- Um eixo de simetria de 120 graus ligando os dois vértices do tipo 1.



- Três eixos de simetria de 180 graus conforme descrito a seguir. Observe que existem 6 arestas que não contém os vértices *A* e *B*.



Estas 6 arestas formam 3 pares de arestas opostas. Os três eixos de 180 graus são determinados ligando-se os pontos médios de arestas opostas de cada um destes 3 pares.

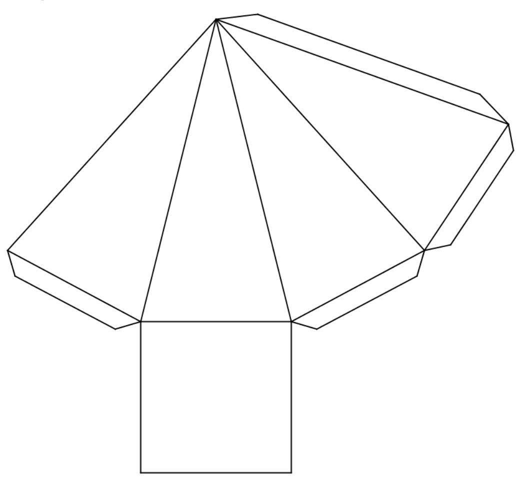


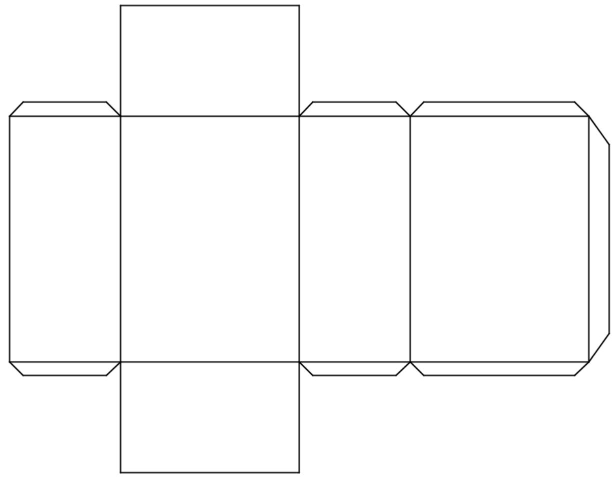
Sugestões de atividades

Antes da execução

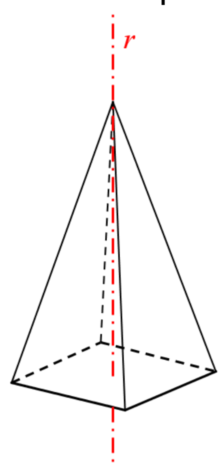
Propor aos alunos as seguintes atividades:

1. Fazer a planificação de uma pirâmide de base quadrada e de um paralelepípedo retangular e montar uma pirâmide e um paralelepípedo. (Sugestão: fazer cópias ampliadas das planificações apresentadas neste guia)





(a) Fazer um orifício no vértice da pirâmide e outro no centro de sua base quadrada e colocar uma vareta ou canudo plástico passando por estes dois orifícios representando uma reta r.

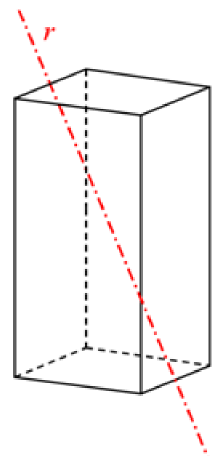


Se for possível girar a pirâmide em torno da vareta por um ângulo θ menor do que 360 graus de modo que, após o giro, a pirâmide parece estar na mesma posição de antes da rotação, a reta r é dita um eixo de simetria de rotação da pirâmide. Além disso, o número de vezes n que a pirâmide deve ser girada, no mesmo sentido, por esse ângulo θ até retornar à sua posição original é denominado a ordem da simetria de rotação. Se isto acontece, a reta r é dita um *eixo de simetria de rotação de θ graus* de ordem n da pirâmide.

Utilize o modelo da pirâmide com a vareta para constatar que a reta r, representada pela vareta, é um eixo de simetria de rotação de 90 graus da pirâmide e que a ordem da rotação é 4, ou seja, que fazendo um giro de 90 graus a pirâmide parece estar na mesma posição inicial e que são precisos 4 giros de 90 graus, no mesmo sentido, para a pirâmide retornar à sua posição inicial.

(b) Fazer orifícios nos pontos médios de duas arestas opostas do paralelepípedo retangular, como mostra a ilustração, e passar uma vareta ou canudo plástico para representar uma reta r.

Se não for possível girar o paralelepípedo em torno da vareta por um ângulo θ menor do que 360 graus de modo que depois de girado o paralelepípedo parece estar na mesma posição de antes da rotação, *a reta r não é um eixo de simetria* de rotação do paralelepípedo.

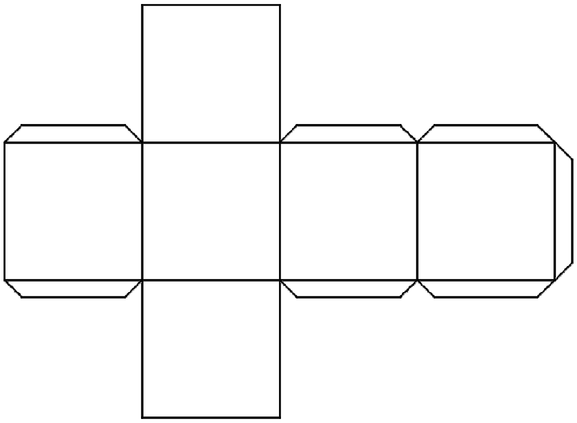


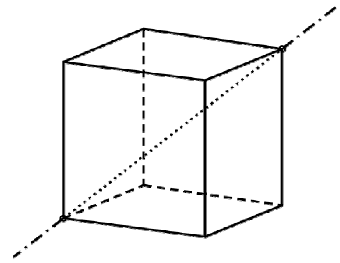
Utilize o modelo do paralelepípedo com a vareta para constatar que a reta r, representada pela vareta, não é um eixo de simetria de rotação do paralelepípedo. Sugestão: para melhor visualização, mantenha sempre a vareta na posição vertical ao girar o paralelepípedo.

Depois da execução

Propor aos alunos as seguintes atividades:

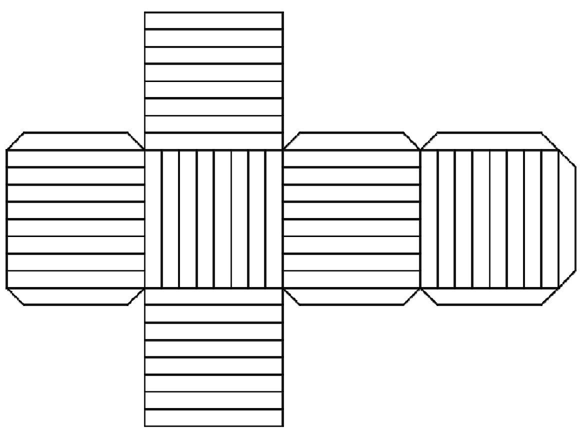
1. Fazer a planificação do cubo e montar um cubo. Fazer orifícios nas extremidades de uma diagonal do cubo e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por esses dois orifícios, como mostra a ilustração.

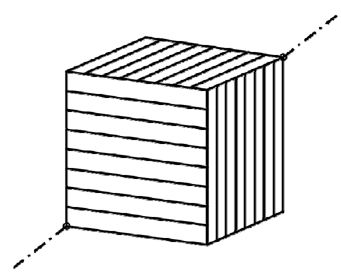




Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria de rotação do cubo. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Além disso, verificar se existem mais eixos deste tipo. (Para melhor visualização, segure o cubo com a vareta de forma que a vareta fique na posição vertical e note que em cada um dos vértices por onde passa a vareta encontram-se 3 faces do cubo.)

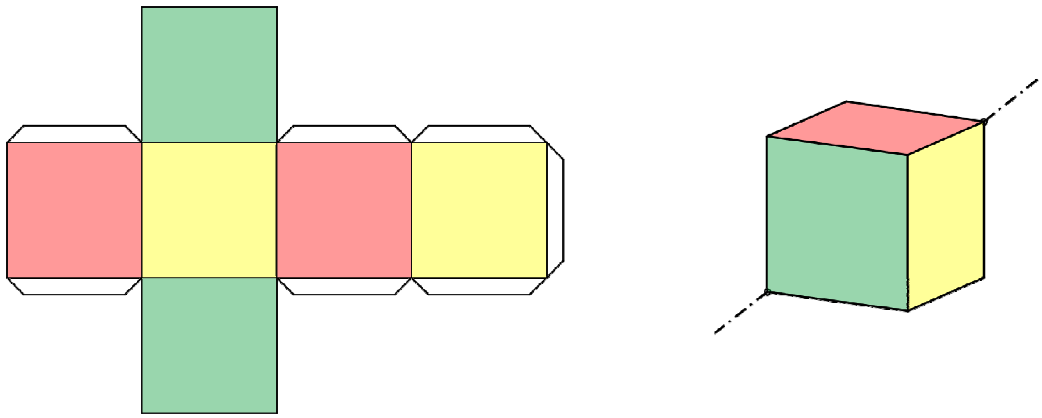
2. Fazer a planificação do cubo e montar um cubo, agora com listras em cada face, traçadas como na ilustração. Fazer orifícios nas extremidades de uma diagonal do cubo e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por esses dois orifícios.





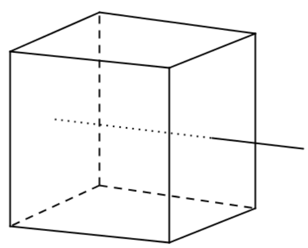
Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria de rotação do cubo levando em conta a forma do cubo e a disposição das listras. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Além disso, verificar se existem mais eixos deste tipo.

3. Fazer a planificação do cubo e montar um cubo, agora com as faces coloridas, como mostra a ilustração. Fazer orifícios nas extremidades de uma diagonal do cubo e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por esses dois orifícios. Proceder como nas atividades anteriores, mas levando em consideração a forma do cubo e também as cores das faces.

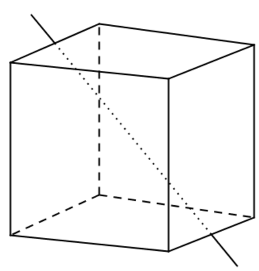


4. Utilizar o cubo montado na atividade 1 e a vareta para

   (a) Verificar se o eixo ligando os centros de faces opostas co cubo é um eixo de simetria de rotação do cubo, levando em consideração somente sua forma. Quantos eixos existem deste tipo?

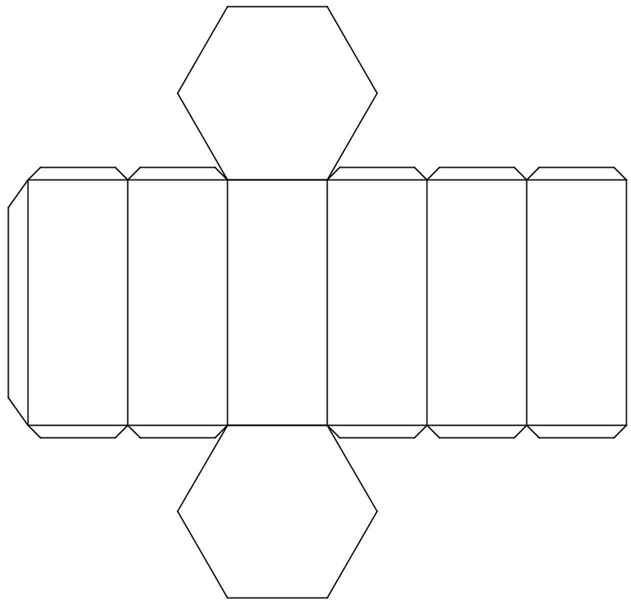
   (b) Verificar se o eixo ligando os pontos médios de arestas opostas do cubo é um eixo de simetria do cubo, levando em consideração somente sua forma. Quantos eixos existem deste tipo?

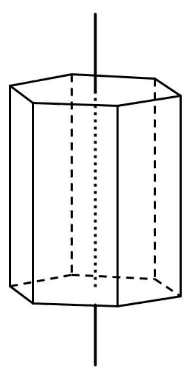
5. Proceder de modo análogo a atividade anterior utilizando o cubo da atividade 2.

6. Idem para o cubo da atividade 3.

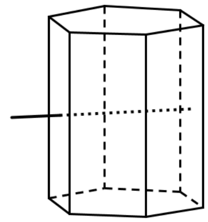
7. Fazer a planificação do prisma hexagonal (regular e reto) e montar o prisma.



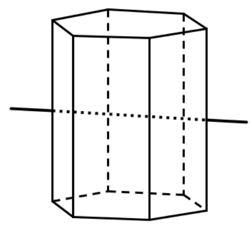
(a) Fazer orifícios nos centros das faces hexagonais e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por estes orifícios. Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria do prisma. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Existem mais eixos deste tipo?



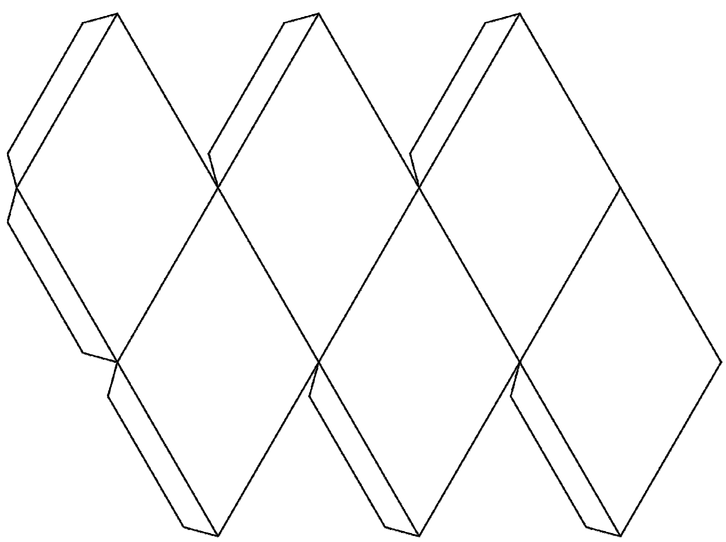
(b) Fazer orifícios nos centros de faces laterais opostas e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por estes orifícios. Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria do prisma. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Além disso, verificar se existem mais eixos deste tipo.



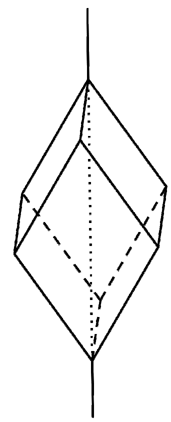
(c) Fazer orifícios nos centros de arestas laterais opostas e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por estes orifícios. Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria do prisma. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Além disso, verificar se existem mais eixos deste tipo.



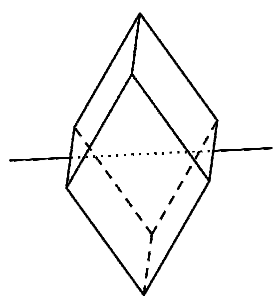
8. Fazer a planificação do romboedro e montar o prisma.



(a) Fazer orifícios nos dois vértices em que as três faces laterais (losangos) encontram-se por um de seus vértices agudos e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por estes orifícios representando uma reta, como na ilustração. Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria do romboedro. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Existem mais eixos deste tipo?



(b) Existem 6 arestas que não contém os vértices utilizados no item anterior. Estas arestas formam 3 pares de arestas opostas. Para cada um destes pares, fazer orifícios nos pontos médios de suas arestas e colocar uma vareta (ou canudo plástico) passando por estes orifícios. Verificar se a reta representada pela vareta é um eixo de simetria do romboedro. Se a reta for um eixo de simetria, qual é o ângulo da simetria de rotação e a sua ordem? Quantos eixos deste tipo existem?



Sugestões de leitura

HERMANN, Weyl. *Simetria*. Coleção Ensaios de Cultura. trad. Victor Baranauskas. Edusp Editora. São Paulo: 1997.

LIMA, Elon L., CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C., . *A Matemática do Ensino Médio*. Vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, 3ª edição, Coleção do Professor de Matemática**.** Rio de Janeiro: SBM, 2000.

O'DAFFER, Phares G., CLEMENS, Stanley R.. *Geometry. An Investigative Approach*. 2nd edition**.** Addison-Wesley Publishing Company, Inc.: 1992**.**

ROHDE, Geraldo M.. *Simetria*. Hemus Editora Ltda**.** São Paulo: 1982.

Ficha técnica

Autoras: *Claudina Izepe Rodrigues* e *Eliane Quelho Frota Rezende*
Revisor: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*