Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Tesouro Cartesiano

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar um problema geométrico motivador;
2. Mostrar a eficácia da Geometria Analítica para a solução de um problema.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Tesouro Cartesiano

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Geometria Analítica: sistema de coordenadas cartesianas.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
Apresentar um problema geométrico motivador;
Mostrar a eficácia da Geometria Analítica para a solução de um problema.

Sinopse
O jovem Luiz participa de uma gincana em sua escola. Uma das tarefas é resolver um desafio matemático. Davi aparece para auxiliá-lo e o problema é resolvido usando conceitos de Geometria Analítica.

Material relacionado
Áudios: *Fazer calçadas, O que é baricentro?;*
Experimentos: *Arco capaz, Engenharia de Grego;*
Softwares: *Geometria do táxi, Movimentos complexos;*
Vídeos: *Ponto de vista, Encontro inusitado.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser desenvolvido em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

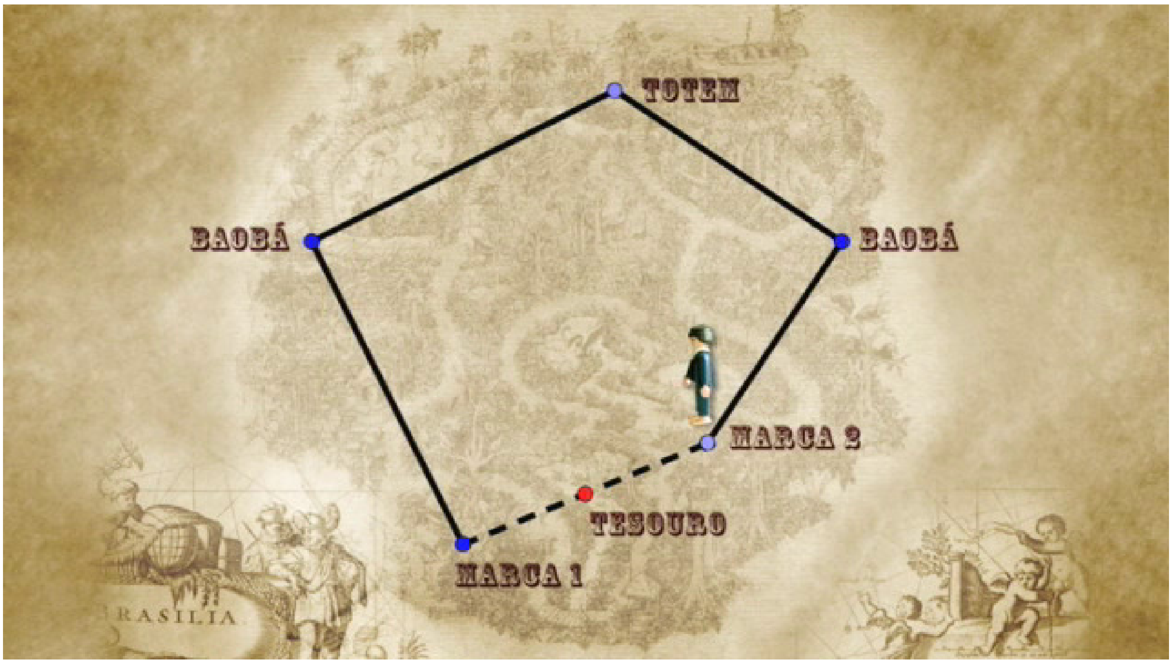
Sobre o programa

O jovem Luiz participa de uma gincana em sua escola e uma das tarefas é resolver um desafio matemático. Outro jovem, Davi, aparece para auxiliá-lo e o problema é resolvido usando conceitos de Geometria Analítica

O desafio

Um tesouro foi enterrado em uma ilha, e foi feito um mapa de sua localização. As instruções contidas no mapa dizem que, ao se desembarcar na ilha, são avistados, imediatamente, dois grandes baobás, árvores consideradas sagradas pelos povos da África, e um totem, símbolo e protetor de uma tribo local.

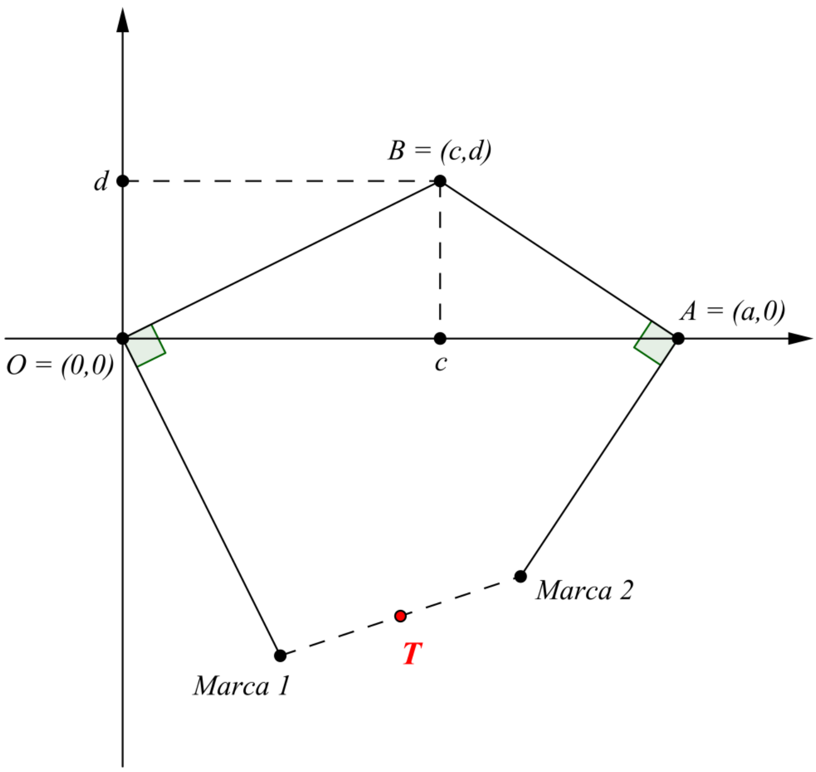
Para encontrar o tesouro deve-se partir do totem e caminhar até o baobá que está à direita dele, contando os passos. Chegando ao baobá, girar para a esquerda 90 graus e caminhar o mesmo número de passos contados. No ponto aonde chegar, fazer uma marca. Voltar novamente ao totem e caminhar até o baobá que está à esquerda, contando novamente os passos. Girar à direita 90 graus, caminhar o número de passos contados dessa segunda vez, e fazer a marca no ponto de chegada. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância de cada uma delas.



Depois de algum tempo, exploradores encontraram o mapa e decidiram ir à ilha resgatar o tesouro. Ao chegarem à ilha tiveram uma surpresa desagradável. Os baobás ainda estavam lá, mas o totem tinha desaparecido. Os exploradores não desanimaram e, depois de pensar um pouco, tiveram uma ótima idéia para resolver o problema de modo bastante prático.

O desafio consiste em descobrir como os exploradores fizeram para encontrar o lugar onde o tesouro estava enterrado e recuperá-lo mesmo sem o totem.

Luiz sugere considerar o sistema de coordenadas cartesianas onde a posição de um dos baobás é a origem $O=(0,0)$ e a posição do outro é o ponto A de coordenadas $A=(a,0)$. Além disso, supor o totem na posição $B=(c,d)$.

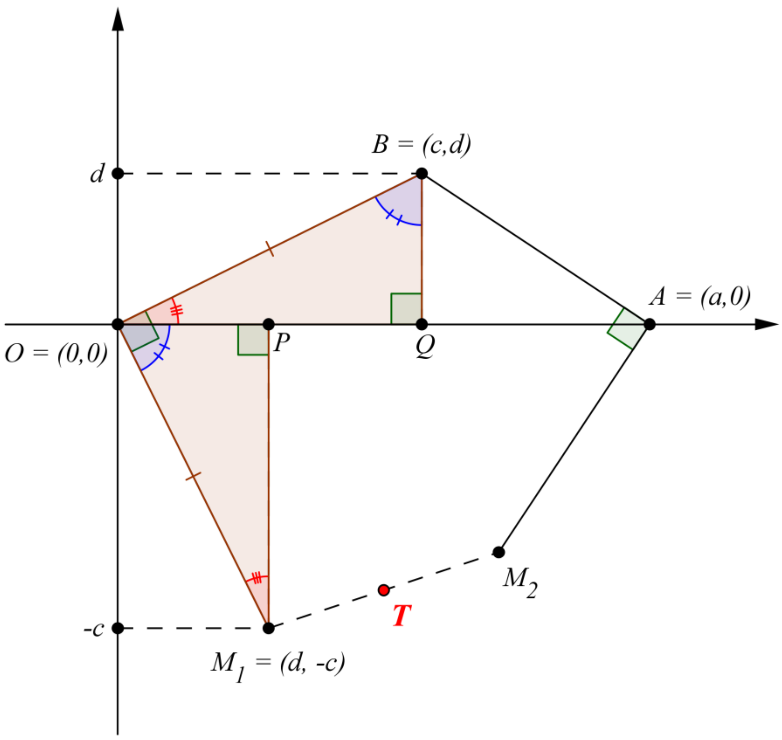


Assim, é necessário encontrar as coordenadas cartesianas do ponto onde está o tesouro.

Como o tesouro está no ponto médio entre os pontos que representam as marcas 1 e 2, então conhecendo as coordenadas destes pontos é possível determinar as coordenadas da posição do tesouro.

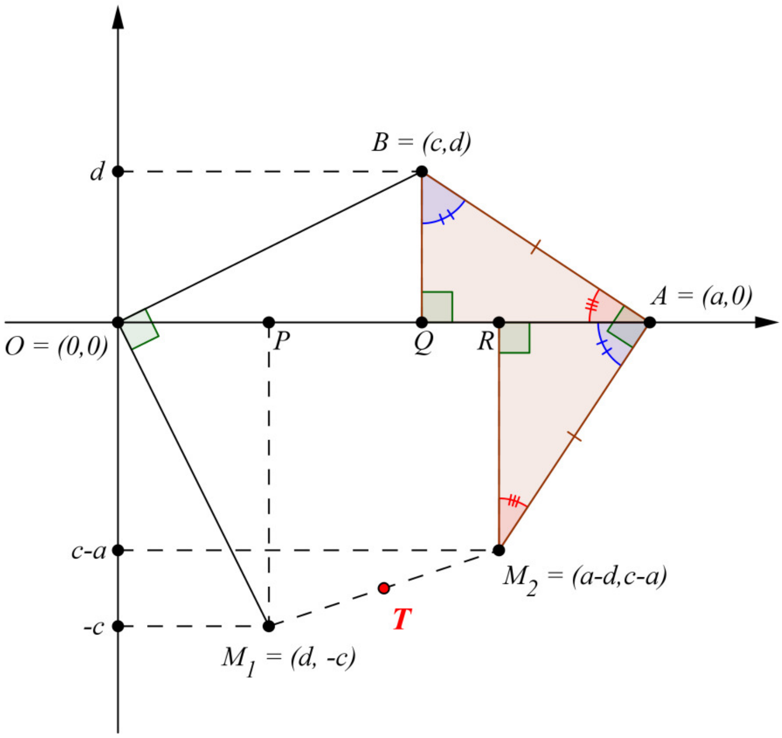
Coordenadas da marca 1

Para determinar as coordenadas da marca 1, denotada M_1, primeiro note que os dois triângulos retângulos OQB e M_1PO, em destaque na figura, são congruentes, pois as hipotenusas OB e M_1O são congruentes, os ângulos BOQ e M_1OP são complementares e disto segue que os ângulos OBQ e M_1OP são congruentes, assim como os ângulos BOQ e OM_1P. Com isto, os lados correspondentes são congruentes e, como $Q=(c, 0)$, as coordenadas do ponto M_1 são d e $-c$, ou seja, $M_1=(d, -c)$.



Coordenadas da marca 2

Os dois triângulos retângulos *BQA* e ARM_2, em destaque na figura, são congruentes, pois as hipotenusas *BA* e AM_2 são congruentes, os ângulos *BAQ* e M_2AR são complementares e disto segue que os ângulos *QBA* e RAM_2 são congruentes, assim como os ângulos *QAB* e RM_2A. Logo, os lados correspondentes são congruentes e, como *Q=(c, 0)*, as coordenadas do ponto M_2 são *a-d* e *c-a*, ou seja, M_2*=(a-d, c-a)*.

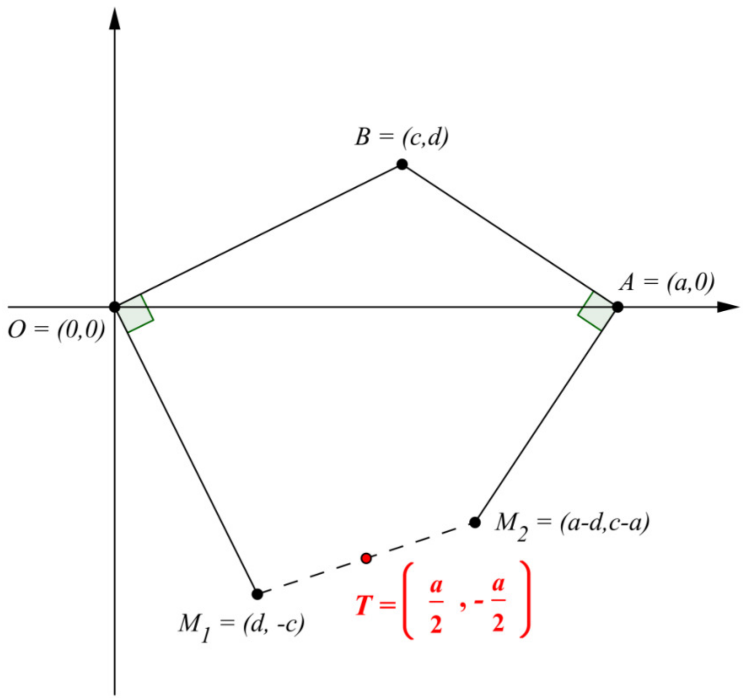


Coordenadas do ponto médio entre as duas marcas

Como M_1*=(d, -c)* e M_2*=(a-d, c-a)*, e as coordenadas do ponto médio *T* são dadas pelas médias aritméticas das correspondentes coordenadas dos dois pontos, conclui-se que

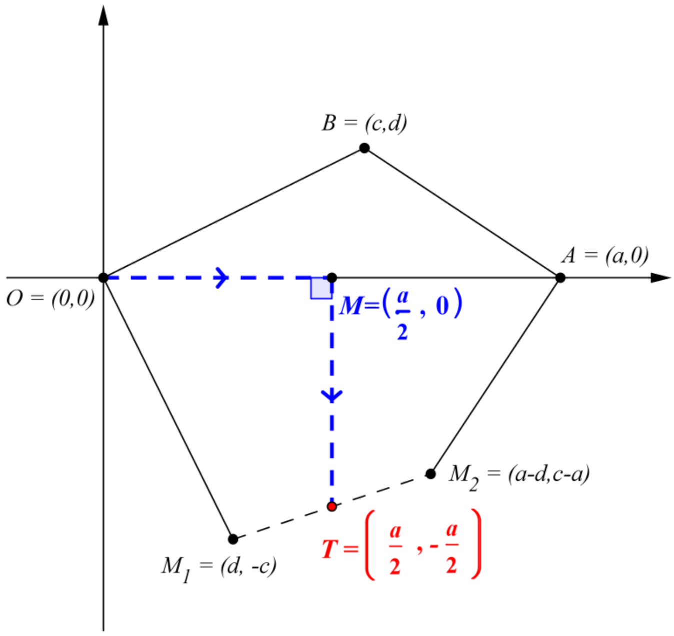
$$T=((d+a-d)/2,\ (-c+c-a)/2)=(a/2,\ -a/2)$$

As coordenadas da localização (T) do tesouro só dependem da localização dos baobás. Isto é, só dependem de *a*, que é a distância entre os baobás, e, para qualquer ponto *B=(c,d)*, a posição do tesouro será sempre *T=(a/2,-a/2)*.



Assim, como não existe mais o totem, é só considerar qualquer ponto para a posição do totem e seguir as instruções do mapa para a localização do tesouro!

Outra forma para encontrar o tesouro é partir do baobá que está no ponto *O*, andar na direção do baobá que está no ponto *A* até a metade do caminho e virar à direita *90º* e, finalmente, andar mais um trecho de mesmo comprimento.



Fatos históricos

René Descartes 1596 – 1650

Pierre de Fermat 1601 – 1665

As contribuições dos matemáticos franceses René Descartes e Pierre Fermat, no século XVII, foram decisivas para o desenvolvimento do método de estudo da Geometria utilizando coordenadas, que é conhecido por Geometria Analítica.

No plano, este método consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, utilizando um sistema de coordenadas.

Assim, figuras geométricas, como a reta, circunferência e outras, são associadas a equações algébricas, o que permite estudar algebricamente muitas questões geométricas.

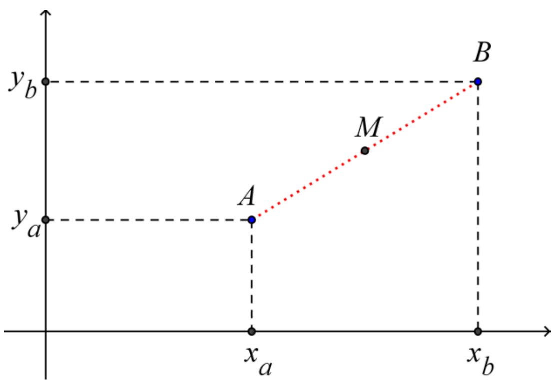
Enfim, a essência da Geometria Analítica é o estudo da Geometria através da Álgebra.

Sugestões de atividades

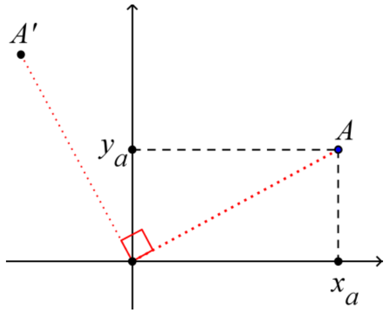
Antes da execução

Propor aos alunos as seguintes questões.

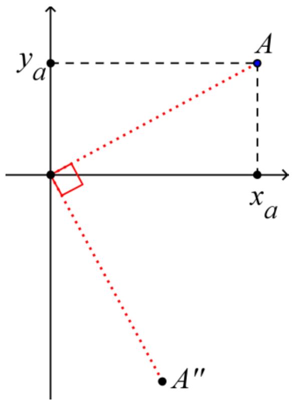
- Determinar as coordenadas cartesianas do ponto médio *M* entre os pontos $A=(x_a, y_a)$ e $B=(x_b, y_b)$, como na figura, em função das coordenadas dos pontos *A* e *B*.



- Determinar as coordenadas do ponto A' obtido pela rotação de 90° no sentido anti-horário do ponto $A=(x_a, y_a)$ em relação à origem, em função das coordenadas do ponto *A*.



- Determinar as coordenadas do ponto A” obtido pela rotação de 90º no sentido horário do ponto $A=(x_a, y_a)$ em relação à origem, em função das coordenadas do ponto A.



Depois da execução

Propor aos alunos as seguintes atividades.

Atividade 1

Baricentro de um triângulo

- Considerar um triângulo ABC arbitrário de vértices $A=(x_a, y_a)$, $B=(x_b, y_b)$ e $C=(x_c, y_c)$. Seja P o ponto na mediana relativa ao vértice A e que dista de A dois terços da medida desta mediana. Mostrar que as coordenadas do ponto P são

$$(x_a+x_b+x_c)/3 \text{ e } (y_a+y_b+y_c)/3.$$

- Seja *Q* o ponto na mediana relativa ao ponto *B* e que dista de *B* dois terços da medida desta mediana. Mostrar que as coordenadas do ponto *Q* também são

$$(x_a+x_b+x_c)/3 \text{ e } (y_a+y_b+y_c)/3.$$

- Seja *R* o ponto na mediana relativa ao ponto *C* e que dista de *C* dois terços da medida desta mediana. Mostrar que as coordenadas do ponto *R* também são

$$(x_a+x_b+x_c)/3 \text{ e } (y_a+y_b+y_c)/3.$$

Comentário: os três itens desta atividade mostram que as medianas de qualquer triângulo se intersectam em um ponto que dista de cada vértice dois terços da medida da correspondente mediana. Este ponto comum, ou seja, o encontro das três medianas é chamado o baricentro do triângulo, denotado por *G*. Além disso, tem-se

$$G=(x_g\ ,\ y_g\ ) = ((x_a+x_b+x_c)/3\ ,\ y_g=(y_a+y_b+y_c)/3\ ).$$

Atividade 2

Triângulo equilátero e baricentro

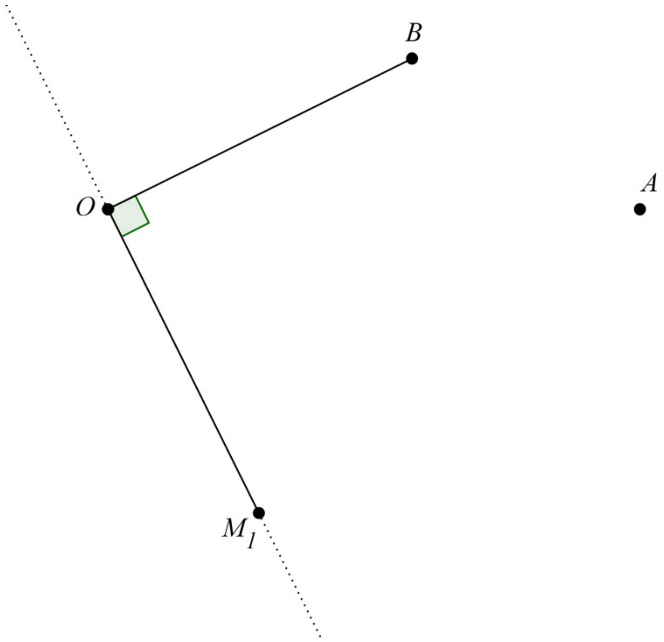
- Considerar no plano cartesiano os pontos $O=(\ 0\ ,\ 0\ )$ e $A=(\ a\ ,\ 0\ )$, com $a>0$. Seja o ponto *B* de coordenadas positivas de forma que o triângulo *OAB* é equilátero. Determinar as coordenadas do ponto *B*. Observação: o ponto *B* é a rotação de 60^o em relação à origem e no sentido anti-horário do ponto *A*.
- Determinar as coordenadas do baricentro do triângulo *OAB*.

Atividade 3

Visualizar o problema do tesouro utilizando um programa computacional de geometria dinâmica – Cabri-Géomètre ou GeoGebra[1]. (referência [JESUS, BRAGA])

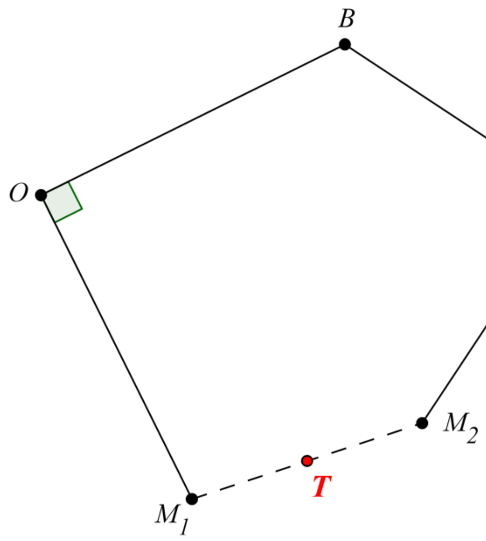
No programa computacional realizar a seguinte construção:

- Criar dois pontos *O* e *A* representando os dois baobás e um ponto *B* representando a localização do totem.
- Traçar os segmentos *BO* e *BA*.
- Construir um segmento OM_1 perpendicular ao segmento *BO*, como na figura, de medida igual à medida de *BO*. (obs.: usar o recurso reta perpendicular por um ponto do programa e, em seguida, marcar o ponto M_1, como na figura, de forma que $BO=OM_1$).



- De modo análogo, construir um segmento OM_2 perpendicular ao segmento *BA*, como na figura, de medida igual à medida de *BA*.
- Construir o segmento de extremidades M_1 e M_2.
- Marcar o ponto médio *T* entre os pontos M_1 e M_2.

[1] O GeoGebra é um programa gratuito e pode ser obtido em www.geogebra.org



- Movimentar o ponto que representa o totem, ou seja, o ponto *B*, e observar o que acontece com o ponto *T* que representa a localização do tesouro. Visualmente é possível constatar que a posição do tesouro não depende da posição do totem.

Sugestões de leitura

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C.. *A Matemática do Ensino Médio.* Vol.3, Coleção do Professor de Matemática, SBM, (1998).
EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* 4. Ed. Campinas: Editora da Unicamp, (2004).
LIMA, Elon L., CARVALHO, Paulo C. P. (colaboração). *Coordenadas no Plano.* Coleção do Professor de Matemática, SBM, (2005).
JESUS, Adelmo R.; BRAGA, Maria Zita C.. *Revisitando a ilha do tesouro. Ver para crer.* Revista do Professor de Matemática 48, p. 37–38, (2002).

Ficha técnica

Autoras: *Claudina Izepe Rodrigues, Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz*
Revisor: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*