



Matemática
Multimídia

Números
e funções



Guia do Professor



Vídeo

Se Eu Fosse Você

Série Matemática na Escola


Objetivos

1. Introduzir o conceito de grafos;
2. Exibir algumas de suas aplicações;
3. Divulgar um problema em matemática ainda sem solução.



UNICAMP

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 

Se Eu Fosse Você

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Grafos e aplicações de grafos.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Introduzir o conceito de grafos;
2. Exibir algumas de suas aplicações;
3. Divulgar um problema em matemática ainda sem solução.

Sinopse

Autor de novelas troca, por um dia, de profissão com seu irmão gêmeo, um engenheiro de tráfego. Enquanto desempenham as atividades um do outro, descobrem que seus trabalhos têm muito em comum.

Material relacionado

Áudios: *Pontes de Königsberg*;
Experimentos: *Caminhos e grafos*; *Como colorir um mapa*.
Softwares: *Matrizes e aviões*;

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo tem a finalidade de apresentar ao aluno um conceito diferenciado de relação entre elementos de um conjunto, dada através de uma estrutura denominada grafo. Nesta ficção, dois irmãos gêmeos trocam de emprego por um dia e passam a exercer as atividades um do outro. A princípio suas funções parecem muito distintas, contudo, enquanto trabalham, notam semelhanças em suas tarefas, o que os leva a discutir sobre maneiras de se representar relações entre diversas coisas, inclusive pessoas.

Grafos são estruturas discretas representadas por vértices e arestas, nos quais as arestas estabelecem relações entre vértices, ligando-os entre si. Existem muitos tipos diferentes de grafos, que essencialmente se distinguem pela quantidade e pelo tipo de arestas ligando seus vértices.

Uma correção. Quando Gustavo vai explicar ao seu irmão Gilberto os significados de *conexão* e *elemento de um grafo* o ator, procurando simplificar sua abordagem ao tema, cometeu erros de abuso de linguagem. Na verdade, o que Gustavo chama de conexão e elemento de um grafo são denominados em matemática de aresta e vértice, respectivamente.



Hoje em dia, aplicações de grafos são encontradas em diversas áreas do conhecimento humano, como na economia, psicologia, biologia e computação, tendo numerosas e importantes finalidades, por exemplo: Reduzir os custos de transporte de pessoas e mercadorias; dinamizar o fluxo de dados em redes de telefonia celular e internet. Historicamente, entretanto, a aplicação de grafos tem uma origem bastante lúdica, uma vez que eles eram largamente empregados em quebra-cabeças como o seguinte:

Quebra-cabeça: Todo mapa pode ser colorido usando-se não mais do que quatro cores?

Desde sua proposição, esta brincadeira ficou conhecida como *problema das quatro cores*. Embora de enunciado bastante ingênuo, esta questão acabou se mostrando de difícil solução, tendo sido satisfatoriamente verificada apenas em 1976, através de uma prova excessivamente intrincada, na qual se mostrou que, se o problema das quatro cores fosse falso, então ele deveria satisfazer uma determinada propriedade e esta, posteriormente, soube-se falsa.

A lógica por detrás desta demonstração é um recurso muito utilizado em provas matemáticas, conhecido como *prova por contradição*. Neste método, faz-se uma suposição, que, por inspeção do problema, já

desconfiamos ser falsa, e, a partir dela, tira-se algumas conclusões. Se ao menos uma destas conclusões contradisser algo que sabemos ser verdadeiro, então nossa suposição deve estar errada e, desta forma, o contrário do que ela afirma é que deve ser verdadeiro. Um problema típico que emprega este tipo de raciocínio é mostrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, o qual está demonstrado a seguir.

Proposição: O número $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Então, segundo a própria definição de número racional, devem existir inteiros a e b , com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = a/b$. Sem perda de generalidade, podemos tomá-los como sendo primos entre si, isto é, coprimos pois a/b trata-se de um quociente. Agora, como $\sqrt{2} = a/b$, segue que $a^2 = 2b^2$, ou seja, a^2 é um número par. Mas sendo par, o número a também deve ser par, afinal, se fosse ímpar, seu quadrado necessariamente seria um número ímpar. Portanto, $a = 2c$, para algum inteiro c . Logo, $2b^2 = 4c^2$, ou ainda, $b^2 = 2c^2$ e, assim, b também é um número par. Mas, então, 2 é um fator comum à a e b e isto é um absurdo, pois a e b são coprimos. Logo, a suposição que fizemos no início desta demonstração encontra-se equivocada e, por isso, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Professor. Apresente oportunamente a seus alunos o método da prova por contradição. Além de logicamente interessante, ele exige discernimento e ainda é uma boa ferramenta para tratar de problemas mais abstratos em matemática.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Professor, antes de exibir este vídeo aos seus alunos, converse informal e brevemente com eles sobre os tópicos aqui apresentados, sempre procurando despertar a curiosidade matemática em cada um

deles. Uma boa maneira de se fazer isso é apresentando-lhes o seguinte quebra-cabeça, conhecido como *problema das sete pontes de Königsberg*.

Quebra-cabeça (Problema das Sete Pontes de Königsberg): A cidade de Königsberg é dividida em quatro áreas por um rio que a atravessa e há sete pontes conectando estas regiões. Aos domingos, os cidadãos desta cidade gostam de caminhar ao sol, pois lá é muito frio, e, enquanto o fazem, perguntam àqueles que pelo caminho encontram:

“É possível iniciar nossas caminhadas em qualquer lugar desta cidade, atravessar todas as suas sete pontes uma única vez e ainda retornar ao ponto de partida?”

Se você visitasse Königsberg, você seria capaz de dar uma resposta a estas pessoas?

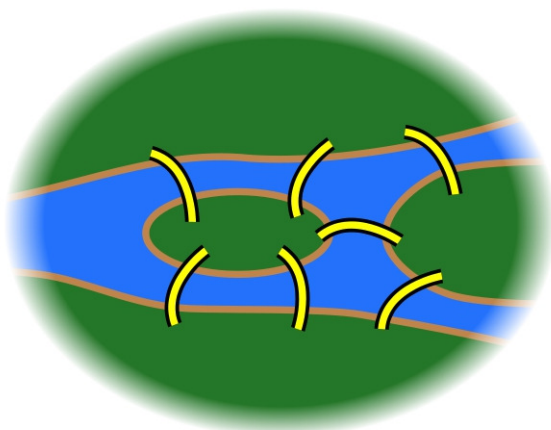


Figura 1. Königsberg e suas sete pontes.

Solução: Não é possível realizar tal caminho, pois se fosse teríamos de entrar e sair de cada região da cidade o mesmo número de vezes, o que não pode ocorrer, já que cada região é ligada as demais por um número ímpar de pontes.

Professor. Sugerimos que você apenas enuncie o problema, deixando para demonstrá-lo logo após a exibição deste vídeo.

Depois da execução

Professor, encerrada a exibição, procure esclarecer todas as possíveis dúvidas de seus alunos, aproveitando-se, também, para indagá-los a respeito do vídeo: se gostaram dele ou não, o que acharam de seus personagens, se alguém ali se identifica com um deles, etc. Não deixe de fazê-lo, visto que esta é uma prática bastante benéfica à formação de seus alunos, na medida que permite-se a eles liberdade de expressão e interação. Assim feito, solucione o problema das sete pontes para seus alunos. Quando terminar, desenhe em sua lousa a seguinte figura esquemática da cidade de Königsberg, observando enquanto o faz que todas as regiões desta cidade são denotadas por vértices e que estes se encontram ligados uns aos outros por arestas, em quantidade igual ao número de pontes que existem entre as regiões que os vértices representam.

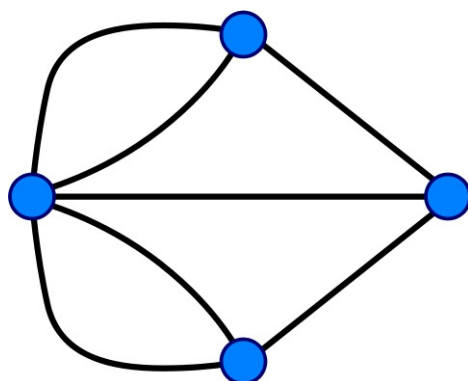


Figura 2. Grafo da cidade de Königsberg.

Conclua, então, que o conjunto destes vértices e arestas é um grafo e o que seus alunos vêem na lousa é simplesmente uma de suas muitas representações, que por sua vez, representa o problema das sete pontes. Argumente, daí, que representações de problemas em problemas equivalentes é algo bastante corriqueiro em matemática e muitas simplificações decorrem delas. O próprio problema das sete pontes é um exemplo disto, uma vez que sua solução segue quase que imediatamente da representação encontrada para ele por meio de grafos, bastando apenas alguns minutos de inspeção para intuí-la.

Professor, proponha agora o seguinte desafio a seus alunos:

Desafio: Um motorista carreteiro acaba de ter seu caminhão carregado com uma carga de refrigerantes, que deverá ser distribuída em supermercados de cinco cidades diferentes, A, B, C, D e E, partindo-se da cidade A. Como este motorista recebe por carga entregue, ele está interessado em entregar o maior número possível de cargas em um mesmo dia. Assim sendo, ele deseja visitar cada cidade uma única vez por viagem e ainda fazer isso no menor tempo possível, retornando, ao final, à cidade A para reabastecer seu caminhão. Orientando-se pelo esquema a seguir, no qual os números sobre as arestas representam as distâncias entre cidades, em que ordem este motorista deveria visitar as cidades B, C, D e E para maximizar seus rendimentos?

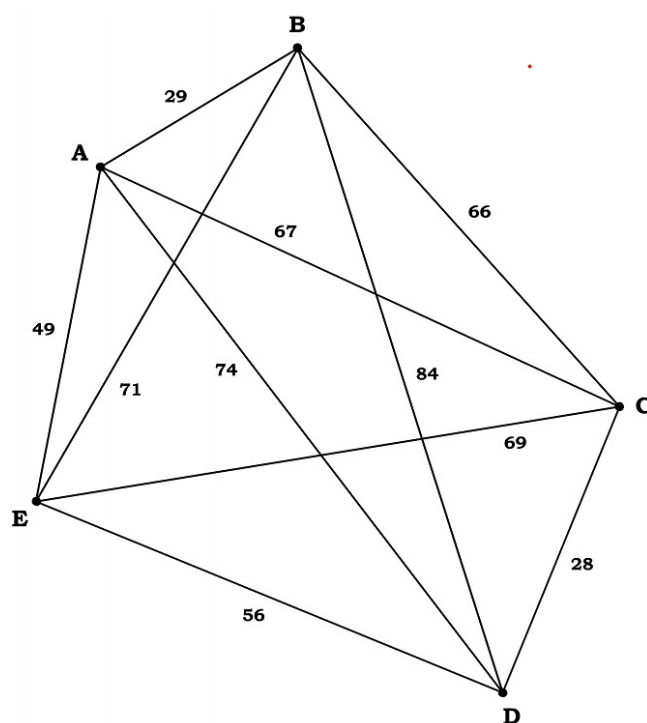


Figura 3. Grafo mostrando a distância entre as cinco cidades.

Solução: O tempo gasto pelo motorista em cada viagem é proporcional a distância por ele percorrida entre tais cidades. Portanto, para gastar menos tempo por viagem, o motorista precisa dirigir pela menor distância possível. Existem 24 rotas partindo da cidade A e retornando a esta. Por inspeção, verificamos que a menor distância é dada pela rota A-B-C-D-E-A.

Professor, não existe método conhecido que dê a solução ótima para este tipo de problema e, por isso, não há outra maneira de realizá-lo (buscando-se a melhor solução) a não ser por inspeção. Logo, deixe seus alunos se divertirem por alguns minutos e depois explique-lhes que este ainda é um problema sem solução em matemática, conhecido como *problema do caixeiro viajante*. Por ser de fácil compreensão e bastante palpável, encorage todos os seus alunos a procurarem por uma solução para este problema que não envolva a inspeção de todas as possibilidades de rotas, dizendo-lhes que todos têm a capacidade para resolvê-lo e, se o fizerem, talvez fiquem famosos. A intenção por trás desta motivação é que eles se sintam naturalmente inclinados a abordar um problema em matemática e fazendo-o provavelmente tomarão gosto por esta.

Sugestões de leitura

Paulo O. B. Netto (2006). Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos. Editora Edgard Blücher.

Magali M. A. Barroso (1998). A Matemática na Limpeza Urbana: Trajetória Ótima de Um Caminhão de Lixo. SBMAC.

Ficha técnica

Autor *Douglas Mendes*

Revisor *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*