Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Roda Roda

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir o conceito de permutação circular;
2. Aplicar o conceito de permutação simples.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Ciência e Tecnologia
Ministério da Educação
Governo Federal

Roda Roda

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Permutações e permutações circulares.

Duração
Aprox. 12 minutos.

Objetivos
1. Introduzir o conceito de permutação circular;
2. Aplicar o conceito de permutação simples.

Sinopse
Duas professoras, pretendendo fazer interação de seus alunos, querem saber quantas rodas de ciranda é possível formar com 15 estudantes.

Material relacionado
Áudio: *Permutações em uma fila;*
Software: *Princípio da casa dos pombos.*

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa ilustra como uma situação problema pode ser resolvida aplicando conceitos de permutações.

No vídeo, uma das professoras mostra como determinar o número de possibilidades com que os 15 estudantes de uma classe podem ser dispostos em uma roda de ciranda.

Ela inicia a explicação considerando um caso particular: a disposição de quatro estudantes em círculo. Representando os alunos por A, B, C e D, determina a quantidade de modos de colocá-los em fila, fixa em seguida um dos alunos e permuta os outros três. Fixando A, por exemplo, há seis possibilidades, ou seja, 3! para B, C e D.

Assim, fixando-se B, C ou D tem-se também 3! possibilidades (para cada um). Dessa forma, teremos que $4.3! = 4! = 24$ disposições distintas para quatro estudantes em fila. Em seguida, a professora faz a passagem da permutação em fila para a permutação circular. Observa que as filas ABCD, BCDA, CDAB e DABC quando colocadas em círculo representam uma única disposição, ou seja, qualquer uma dessas quatro pode ser obtida a partir de outra através de rotações. E, reciprocamente, pode-se afirmar que para cada disposição circular correspondem quatro disposições em fila. Logo, o número de permutações circulares de quatro elementos é $\frac{4!}{4} = 3! = 6$.

Figura 1. Número de permutações para quatro estudantes em fila.

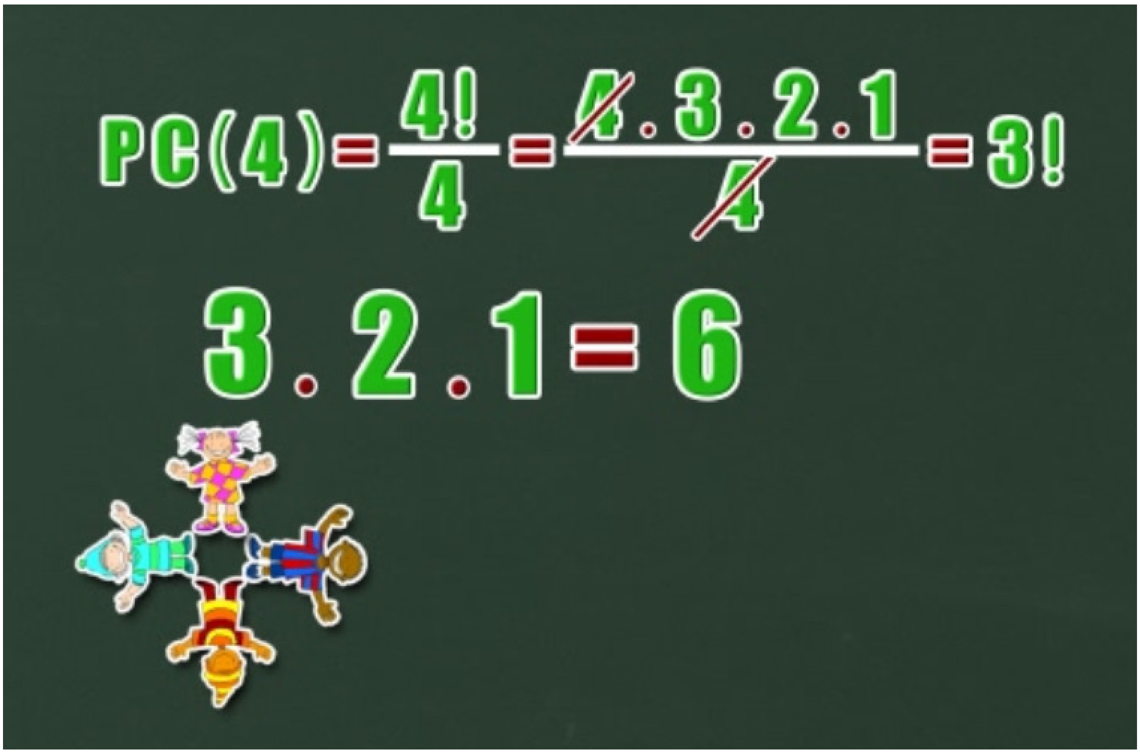

Figura 2. Número de permutações circulares de quatro elementos distintos.

Representando a quantidade de permutações simples e permutações circulares de n elementos distintos, respectivamente, por P_n e $(PC)_n$, a professora conclui, através da indução, que $(PC)_n = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n}$. Ou seja, $(PC)_n = (n-1)!$. E com essa fórmula ela resolve o problema proposto para $n = 15$ estudantes.

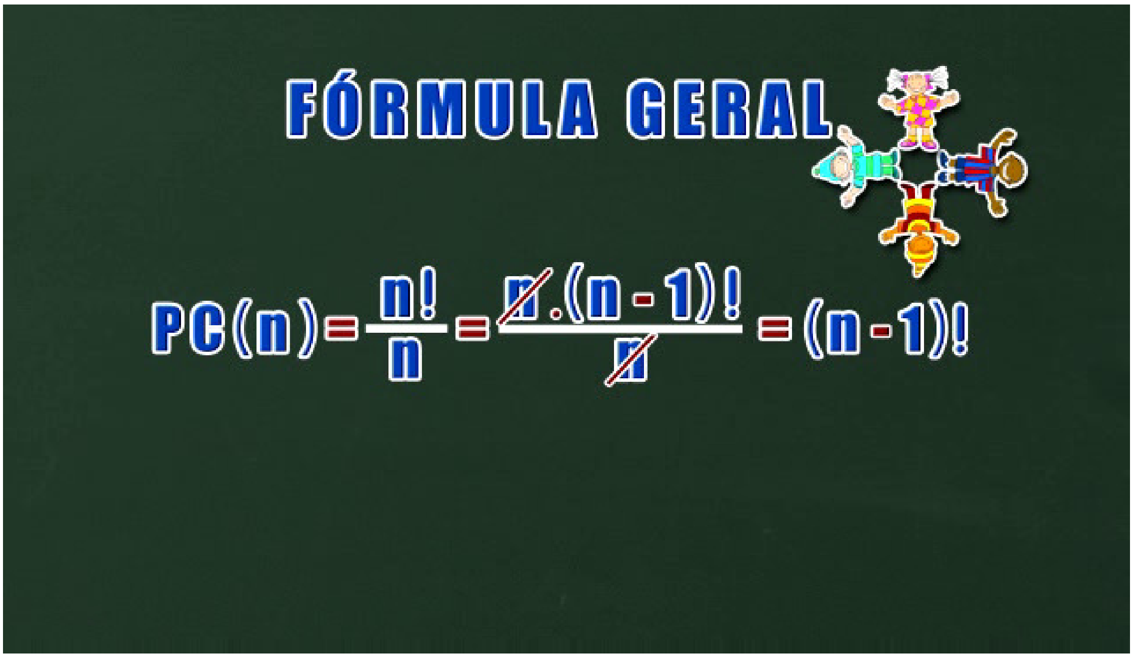

Figura 3. Fórmula geral das permutações circulares.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos a revisão do Princípio Fundamental da Contagem e de fatorial, arranjos e permutações simples.

Depois da execução

Após a execução do vídeo, o professor poderia iniciar o estudo de permutações circulares, dando ênfase a situações-problemas que envolvam esse conceito.

Problema 1: De quantos modos quatro casais podem posicionar-se ao redor de uma mesa em forma de octógono regular:

a. Sem restrições?

b. Sendo que pessoas do mesmo sexo não se posicionam uma ao lado da outra?

c. Sendo que duas determinadas pessoas não se posicionam uma ao lado da outra?

Solução: Estando as pessoas sentadas nos pontos médios de cada lado da mesa, é como se estivessem posicionadas em círculo. Trata-se, portanto, de permutações circulares.

a. Não havendo restrições, as 8 pessoas podem sentar-se de $(PC)_8 = 7! = 5040$ modos distintos.

b. Neste caso, os homens e as mulheres devem sentar-se intercalados. Há $(PC)_4 = 3! = 6$ modos das mulheres se posicionarem na mesa, deixando sempre entre duas delas uma cadeira vazia. E, nas quatro cadeiras vazias, há $P_4 = 4! = 24$ maneiras de os homens serem colocados. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, tem-se $24.6 = 144$ modos distintos das pessoas do mesmo sexo não se posicionarem em cadeiras vizinhas.

c. Determinemos em quantas das 5040 maneiras distintas (item a) essas duas pessoas se posicionam lado a lado. Considerando essas duas pessoas como sendo um único elemento (devendo ficar uma ao lado da outra) das permutações circulares, tem-se: $(PC)_7 = 6! = 720$.

Ocorre que uma das duas pessoas pode se posicionar à esquerda da outra e vice-versa; Logo, há $2.720 = 1440$ maneiras distintas de estas duas pessoas ficarem lado a lado. Portanto, há $5040 - 1440 = 3600$ modos de duas determinadas pessoas não se posicionarem uma ao lado da outra.

Problema 2: Uma indústria confecciona brinquedos em formato de pirâmide hexagonal regular. Para colorir as faces dessas pirâmides, cada face com uma cor, são usadas sete cores distintas. Quantas possibilidades de pintura dessas pirâmides existem?

Solução: Para pintar a base da pirâmide, há 7 possibilidades de escolha de cor. Uma vez escolhida a cor de pintura da base, há $(PC)_6$ maneiras de pintura das faces laterais, já que, pela simetria da pirâmide regular, fazendo rotações múltiplas de 60º de uma pirâmide já colorida, em torno de seu eixo, as disposições obtidas são indistinguíveis. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $7(PC)_6 = 7.5! = 7.120 = 840$ possibilidades de pinturas dessas pirâmides.

Problema 3: Uma moça quer montar um colar de seis pérolas distintas, igualmente espaçadas. Quantas possibilidades de montagem deste tipo de colar existem?

Solução: Poderíamos admitir que a quantidade de colares distintos fosse $(PC)_6 = 5! = 120$. Ocorre que as duas disposições da figura abaixo são indistinguíveis, pois o colar pode ser virado. Tem-se, portanto, $\frac{120}{2} = 60$ possibilidades de montagem deste colar.

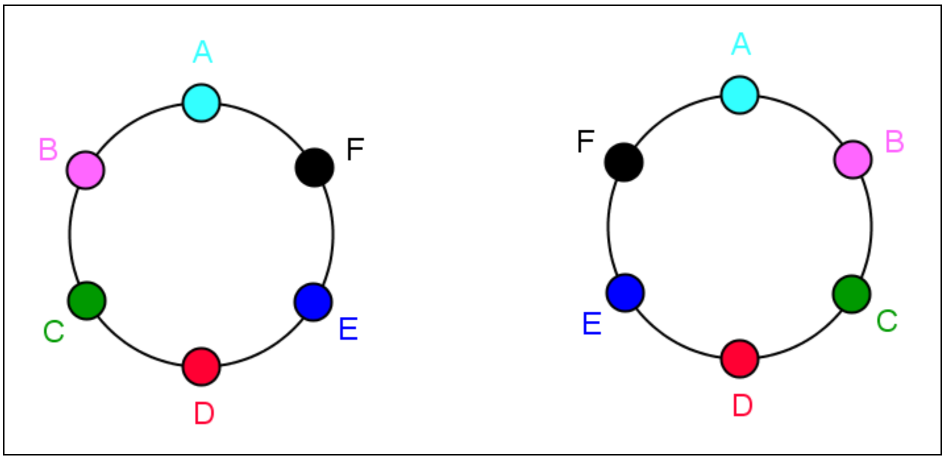

Figura 4. As configurações acima representam o mesmo colar.

Sugestões de leitura

Bachx, A. C.,1975. Prelúdio à Análise Combinatória - Companhia Editora Nacional

Hazan, Samuel (1996). “Fundamentos de matemática elementar – Vol.5: Combinatória, probabilidade” , 7ª. Edição, São Paulo: Atual, 2004.

Morgado, A. C. Oliveira e outros. Análise Combinatória e Probabilidade – SBM

Santos, José Plínio et al. “Introdução à Análise Combinatória”, 2008, 1ª Edição, Ciência Moderna.

Santos, José Plínio et al. “Problemas resolvidos de combinatória”, 2007, 1ª Edição, Ciência Moderna.

Ficha técnica

Autor *Luiz Antonio Mesquiari*
Revisor *José Plínio de Oliveira Santos*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*