Matemática Multimídia

Análise de dados e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

Revendo a moratória

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar uma aplicação do valor esperado ou esperança, em probabilidade.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Revendo a moratória

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade; Esperança.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar uma aplicação do valor esperado ou esperança, em probabilidade.

Sinopse
Mário está em apuros para pagar uma dívida assumida com o Luigi. Entre sonhos e pesadelos, ele encara um desafio. Para tomar a melhor decisão, algumas considerações sobre valor esperado ou esperança em probabilidade são abordadas. O final provavelmente é bom.

Material relacionado
Áudios: *Fraude 171;*
Experimentos: *Apostas no relógio;*
Vídeos: *Brasil x Argentina.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Mário deve aproximadamente R$ 50 mil ao Luigi que propõe um desafio, praticamente uma aposta: Luigi mostra dois envelopes idênticos por fora, mas dentro de um tem uma certa quantia de dinheiro desconhecida e no outro tem o dobro desta quantia. Mário, que não sabe qual tem a quantia nem qual tem o dobro dela, deve escolher um envelope. O valor que estiver no envelope escolhido será a sua nova dívida.

Mário escolhe um envelope, mas Luigi permite uma troca. Para saber se vale a pena, eles calculam a esperança de cada envelope.

Definição de esperança
Representemos por X o conjunto de uma variável aleatória *discreta* que contem valores x_1, x_2, x_3, x_4 etc. com as respectivas probabilidades de acontecerem $p(x_i)$. A esperança ou valor esperado é dado pelo somatório

$$E(X) = \sum_i x_i p\left(x_i\right),$$

desde que esta soma ou série assuma um valor finito e $\sum_i p\left(x_i\right) = 1$.

Para uma variável aleatória *contínua X*, a esperança pode ser calculada usando-se função de densidade *f*(*x*) por uma integração como:

$$E(X) = \int xf(x)dx \,,$$

desde que a integral seja convergente e $\int f(x)dx = 1$.

Uma das propriedades da esperança, utilizada no vídeo, é a seguinte:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \,,$$

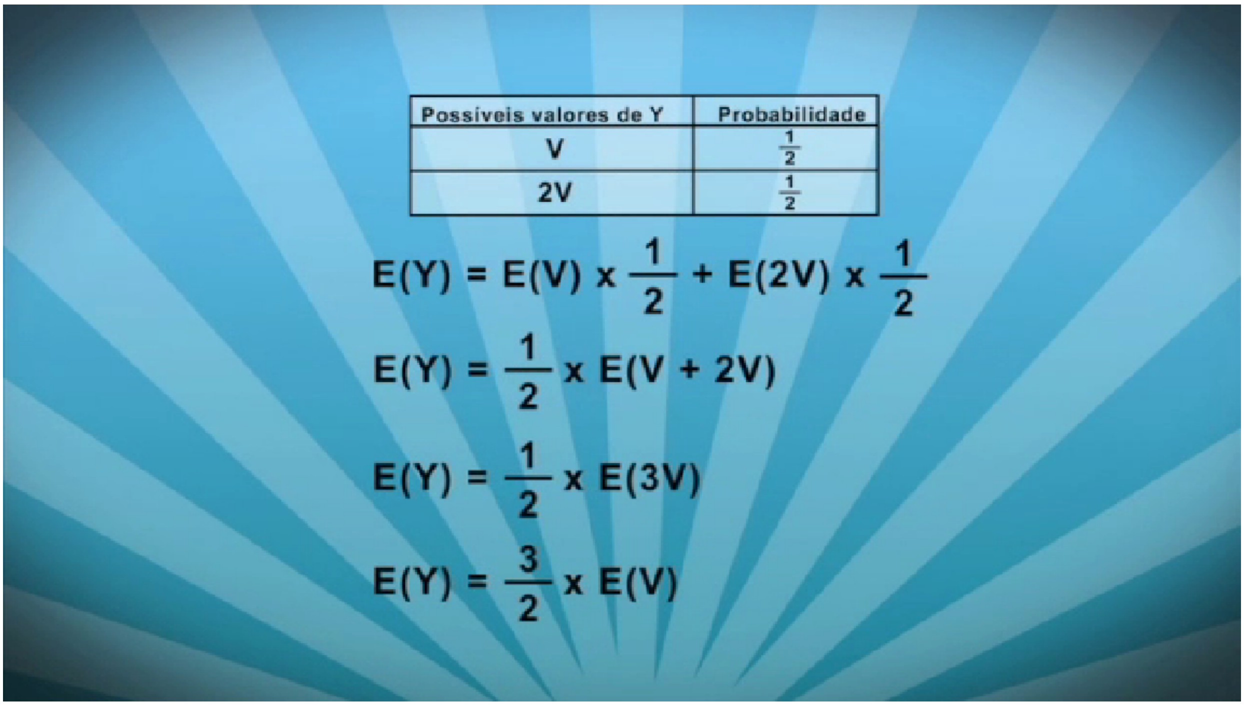
onde *a* e *b* são constantes reais. Em outras palavras, a esperança de uma combinação linear de variáveis aleatórias é a combinação linear das respectivas esperanças das variáveis aleatórias em consideração.

Denotemos por V o menor valor dentro dos envelopes, de modo que um dos envelopes tem a quantia V e o outro 2V.

Chamemos de X o valor dentro do envelope escolhido pelo Mário, e de Y o valor dentro do outro envelope.

Uma possível decisão pode se basear em escolher o envelope com menor valor esperado, para obter uma nova dívida com o menor valor possível. Deste modo, devemos comparar o valor esperado de X com o de Y, e decidir trocar ou não de envelope.

O cálculo do quadro mostra o valor esperado de Y. O valor esperado de X é exatamente o mesmo, já que a distribuição de probabilidade de X é a mesma de Y, de acordo com a tabela na parte superior.



Assim, Mário conclui corretamente que as esperanças associadas a ambos os envelopes seria a mesma.

No entanto Luigi dá mais uma chance para Mário mudar a escolha de envelope ao mostrar que o envelope previamente escolhido tinha o valor de R$ 50 mil, que é essencialmente a dívida atual.

Com esta informação, temos acesso ao valor de V ou de 2V. O outro envelope pode ter R$ 25 mil ou R$ 100 mil, pois a única informação disponível é que um envelope tem o dobro do outro.

Neste momento, Mário usa uma informação subjetiva para arriscar novamente: é mais provável que o Luigi seja um bom sujeito que não iria elevar a dívida do Mário para R$ 100 mil.

Assim, Mário decide trocar de envelope, e de fato, a nova escolha colocou a dívida de Mário em R$ 25 mil. Isto é, Luigi não considerou os juros sobre a dívida contraída por Mário, como se fosse uma **moratória**.

A moratória é uma medida extrema tomada por governos em dificuldades de pagamento de dívida: "devo não nego, pago quando quiser". Como apresentado no *Olha o curta*, a moratória evita o aumento da dívida pela incidência de novos juros, mas coloca o país ou o estado em desconfiança com os credores, vendedores e prestadores de serviços para novos empréstimos ou contratos.

Sugestões de atividades

Antes da execução

O conceito abordado neste vídeo é conhecido como o Paradoxo do Dois Envelopes e representa um importante problema dentro da Teoria de Decisão Estatística, tendo sido discutido por diversos matemáticos, estatísticos teóricos e filósofos da ciência.

A decisão de escolher o outro envelope, pensando que o outro é melhor, explica até certo ponto a quebra da bolsa de valores em 1987, a crise asiática de 1997-98, assim como outras crises financeiras, sendo chamada de "exuberância radical" pelo economista estado-unidense Alan Greenspan.

Por ser uma *aplicação* de probabilidade, é interessante que os alunos estejam familiarizados com o cálculo de probabilidade de eventos e variáveis aleatórias.

O vídeo Brasil x Argentina trata também de um problema de decisão, formalizando alguns conceitos como função de utilidade e árvore de decisão.

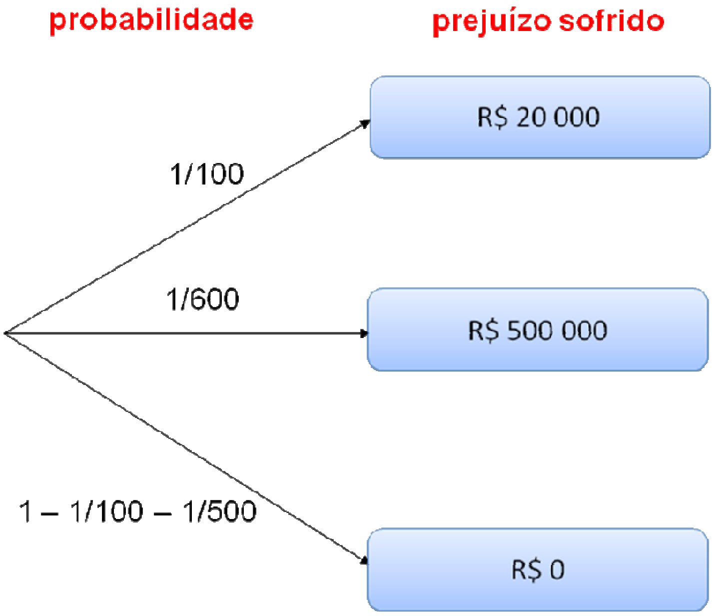
Depois da execução

Problema. Um gerente é contratado para uma grande empresa de transporte que teve muitos prejuízos com acidentes e roubos de caminhões. O presidente da empresa quer fazer seguro para a frota, carga e motorista e pede ao gerente o cálculo do valor esperado do prejuízo para cada caminhão-viagem. Os dados (os valores aqui são hipotéticos) são:

A cada 100 caminhões-viagem, acontece um acidente com prejuízos de R$ 20 mil, em média.

A cada 600 caminhões-viagem, acontece um acidente com perda total do caminhão e da carga, isto é, prejuízo de R$ 500 mil.

Solução: Colocando a informação do problema em uma árvore de probabilidade, obtemos o diagrama seguinte.



Assim, o prejuízo esperado por caminhão-viagem é

$$E=20000 \times 1/100+500000 \times 1/600 + 0= 1000 \times 31/30.$$

Isto é, o valor esperado do prejuízo para cada caminhão-viagem é R$ 31/30 mil, isto é, R$1.033,33.

O gerente então propõe incluir este valor na cobrança dos transportes e fazer um fundo monetário para cobrir os eventuais prejuízos.

Sugestões de leitura

O. Bekman, P.L.Costa Neto (2002). Introdução à Teoria da Decisão Estatística. Editora Edgard Blücher.
P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.
W. Feller (1976). Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações, vol I. Editora Edgard Blücher.
Site recomendado: ALEA - Acção Local de Estatística Aplicada, http://alea-estp.ine.pt

Ficha técnica

Autor Samuel Rocha de Oliveira
Revisão *Laura Leticia Ramos Rifo*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*