Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

A razão dos irracionais.

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar os numeros irracionais.
2. Demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional com o argumento do absurdo.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

A razão dos irracionais

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Números irracionais.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar os números irracionais;
2. Demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional com o argumento da Redução ao Absurdo.

Sinopse
Um jovem procura um desenhista de móveis e lhe propõe o seguinte problema: sua esposa tem uma mesa de 1 metro quadrado e quer aumentá-la para 2 metros quadrados. João, o desenhista lhe apresenta soluções.

Material relacionado
Áudios: *Formigas e* $\sqrt{2}$
Experimentos: *Como dividir o cubo.*

Introdução

Sobre a série

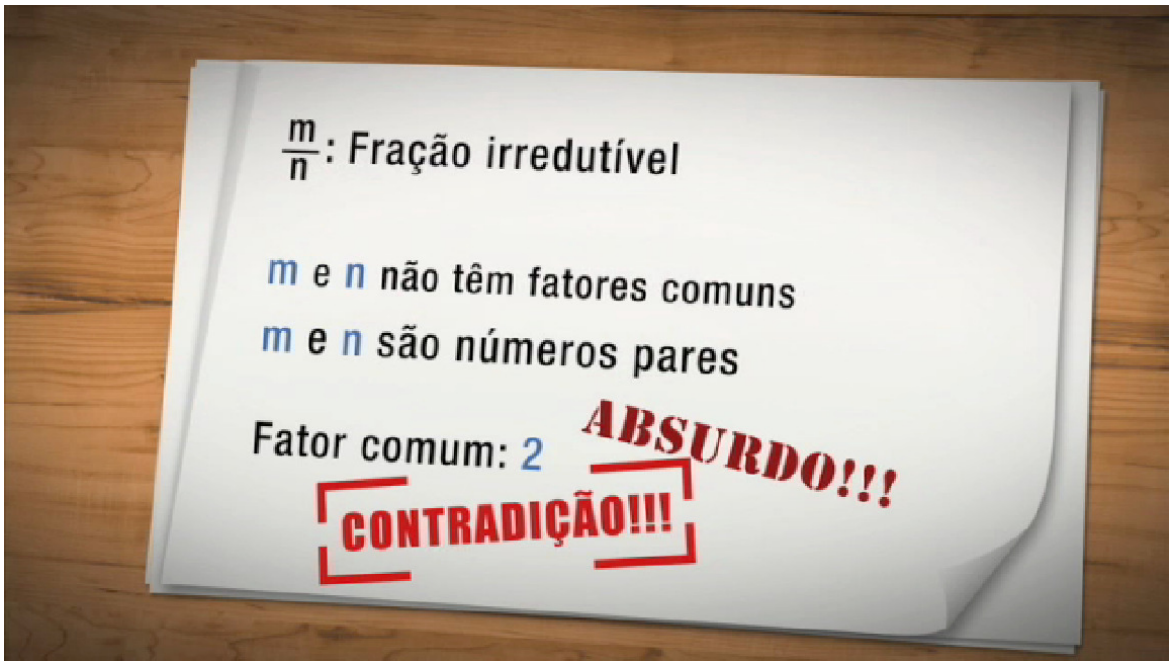
A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo apresenta os números irracionais de uma maneira curiosa, através do desenho de uma mesa quadrada.

Ele aborda também uma parte da história da Matemática Grega. Apresenta uma demonstração simples de um fato, que $\sqrt{2}$ não é um

número racional usando o importante método de demonstração em lógica matemática denominado Redução ao Absurdo, que não é muito comum no ensino médio.



Sugestões de atividades

Antes da execução

Como o vídeo trata tambem da história da matemática, o professor pode introduzir o assunto com seguinte texto como um *release de imprensa* do filme que pode ser distribuído para os alunos pouco antes do filme ou mesmo no dia anterior.

Amanhã: Vídeo de curta metragem : A Razão dos Irracionais

"O bom Deus inventou os números inteiros, o resto é obra do homem"

Leopold Kronecker (famoso matemático alemão do século XIX)

Os números inteiros são abstrações que surgiram do processo de contar objetos. Contudo as necessidades do cotidiano requerem, um pouco mais, as frações ou os números racionais. Para os primeiros matemáticos, parecia evidente que dados dois segmentos de reta, estes poderiam ser medidos como um número inteiro de uma mesma unidade de medida. Foi um choque para os pitagóricos a descoberta que havia contraexemplos como o simples exemplo do lado e a diagonal de um quadrado, pois eles acreditavam que tudo no mundo poderia ser expresso por números naturais ou no máximo racionais. Assim, a medida da diagonal de um quadrado com lado medindo uma unidade é um número irracional, isto é, que não pode ser escrito na forma de razão, ou seja, uma fração.

A primeira demonstração de que $\sqrt{2}$ não é racional, é essencialmente a tradicional e é devida a Aristóteles (384-322 a.C.). Por algum tempo $\sqrt{2}$ era o único irracional conhecido. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais. Por volta de 370 a.C. Eudoxo fez um tratamento magistral dos incomensurávies. Isto aparece no quinto livro dos *Elementos de Euclides*.

A exposição moderna dos números irracionais (que é parecida com a de Eudoxo) foi primeiramente formulada por Dedekind (1831-1916). Em 1872, Dedekind conheceu o matemático George Cantor, que lhe apresentou o seu trabalho sobre a construção dos números reais. Influenciado por Cantor, Dedekind escreveu em 1888 o livro *O que são e para que servem os números* no qual apresenta a construção formal dos números inteiros, racionais e dos números irracionais. Alguns anos mais tarde, Cantor apresentou outra construção do conjunto dos números reais (união do conjunto dos racionais com o dos números irracionais). Neste trabalho ele mostra que um segmento de reta tem como comprimento um número racional ou um número irracional.

Durante a execução

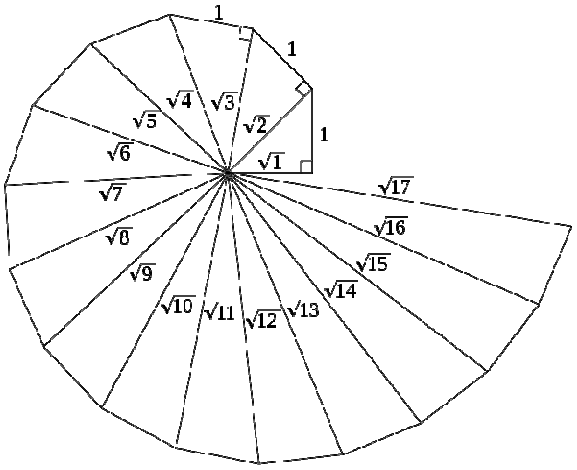
Preste atenção nos argumentos do desenhista de maneira que você possa compará-la com sua própria explicação após a execução.

Este vídeo apresenta uma Prova Matemática. Uma vez apresentado, caso ache conveniente, chame a atenção dos alunos para os elementos de lógica matemática usados na argumentação do desenhista e mostre os trechos do vídeo onde isto ocorre.

Depois da execução

É interessante o professor repetir, passo a passo, a demonstração apresentada no vídeo, isto é, que $\sqrt{2}$ não é racional. Isto permitirá que os alunos possam perceber a sutileza da lógica com o tipo de demonstração de Redução ao Absurdo.

O professor pode construir com os seus alunos a espiral de Teodoro de Cirene, que é a figura abaixo, construindo com régua não graduada e compasso os números abaixo, a partir do teorema de Pitágoras. Observe que as raízes quadradas dos números naturais fornecem números racionais e irracionais.



O professor pode mostrar que toda fração (número racional) pode ser representada por uma dízima periódica e, portanto, os números irracionais não têm representação periódica. Com isto em mente obtenha com seus alunos muitos números irracionais, através de sua representação decimal infinita e não periódica. Por exemplo, os números:

a = 0,1001000100001000001.... (o número de zeros entre dois 1s vai sempre aumentando de 1) claramente não é uma dízima **periódica**.

b = 3,9229222922229222229.....

O professor pode pensar em outros esquemas que possam violar a periodicidade de uma representação decimal conseguindo com isto novos números irracionais. Observe que o método de gerar números irracionais acima *sugere* que existe um número infinito de irracionais.

Uma observação importante no vídeo é a maneira que o desenhista quer construir a solução. Observe que, visto de outro modo, o que ele quer é ver se existe uma unidade de medida de maneira que tanto o lado como a diagonal do quadrado tenham um número inteiro de unidades de medida de comprimento. Assim, ele vai dividir o lado do quadrado, que mede 1 metro, em n partes, de maneira que a unidade de medida é $1/n$. Como algebricamente temos que a diagonal mede $\sqrt{2}$, ele quer saber se existe algum m natural tal que $\sqrt{2}$ tem m unidades de medida $1/n$, ou seja, $\sqrt{2} = m/n$. Quando as medidas de dois segmentos de reta podem ser expressas como um número inteiro de uma **MESMA** unidade de medida dizemos que eles são **comensuráveis**. No caso, mostramos que os segmentos do lado e diagonal do quadrado são **INCOMENSURÁVEIS**. Observe para os alunos que nada muda se os segmentos são medidos em metros, quilômetros, jardas, anos-luz, etc.

O professor ainda pode mostrar como o método de demonstração usado para $\sqrt{p}$ pode ser generalizado para qualquer primo, isto é pode-se demonstrar com o mesmo método o seguinte Teorema:

Teorema: *Se p é um número primo, então* $\sqrt{p}$ *é um número irracional.*

Prova: Suponha como é feito no vídeo que $\sqrt{p}$ é racional e pode ser representado por uma fração irredutível m/n, ou seja, $\sqrt{p} = m/n$ (com m e n números naturais sem fator comum). Elevando ao quadrado temos que $m^2 = p\ n^2$. Claramente temos desta igualdade que p divide m^2 e **como *p* é primo ele necessariamente divide *m***. Logo podemos escrever que $m = p\ k$ para algum número inteiro k. Elevando ao

quadrado temos $m^2 = p^2 k^2$. Igualando as duas expressões de m^2 obtemos a equação $p n^2 = p^2 k^2$. Simplificando o fator comum p obtemos $n^2 = pk^2$. Isto nos diz que p divide n^2 e **como *p* é primo *p* divide *n***. Portanto obtemos que p divide m e divide também n, o que CONTRADIZ a hipótese que a fração m/n é IRREDUTÍVEL!!

Observe que um subproduto óbvio desta demonstração é que ela implica imediatamente que temos um número INFINITO de irracionais já que Euclides mostrou que existe um número infinito de números primos.

Sugestões de leitura

Fundamentos da Aritmética, de Hygino Domingues, Atual Editora.
Elementos de aritmética, de A. Hefez, SBM, 2004.

Ficha técnica

Autora *Otília W. Paques*
Revisão *Adolfo Maia Jr.*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*