Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Quem quer ser um milionário?

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar o famoso “Paradoxo de São Petersburgo”
2. Definir esperança matemática
3. Introduzir a teoria da escolha envolvendo o risco

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Quem quer ser um milionário?

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Esperança matemática; teoria da escolha envolvendo o risco.

Duração
Aprox. 12 minutos.

Objetivos
1. Apresentar o famoso "Paradoxo de São Petersburgo"
2. Definir esperança matemática
3. Introduzir os conceitos de convergência e divergência

Sinopse
Paulo é tentado a participar de um jogo de azar no qual aparentemente ele pode ganhar uma fortuna. Porém, ele logo é chamado à razão.

Material relacionado
Áudios: *Pontes e gregos*
Vídeos: *O crime da rua do gasômetro*, *Brasil x Argentina*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa trata do paradoxo de São Petersburgo. O vídeo descreve o problema como um jogo de cara ou coroa. O protagonista Paulo deve jogar uma moeda sucessivamente e parar quando der cara. Se só aparecer cara no *n*-ésimo lance, Paulo recebe 2 elevado a *n* reais. Então, qual deve ser a quantia que Paulo deve receber?

Nosso senso comum nos diz que é uma soma bem pequena, mas inacreditavelmente a resposta para esta pergunta é um valor infinito.

Denomina-se esperança matemática ou valor esperado (E) o produto de uma grandeza (*n*) pela sua probabilidade (*p*):

$$E = n.p$$

Havendo diversas grandezas, cada uma com probabilidade diferente, o valor esperado será a soma dos produtos de cada grandeza pela respectiva probabilidade:

$$E = n_1.p_1 + n_2.p_2 + \ldots + n_i.p_i + \ldots$$

Assim, em um jogo de cara ou coroa, a probabilidade de aparecer "cara" é de 1/2, a probabilidade de aparecer "cara-cara" é 1/4 e a probabilidade de aparecer "cara-cara-cara" é 1/8.

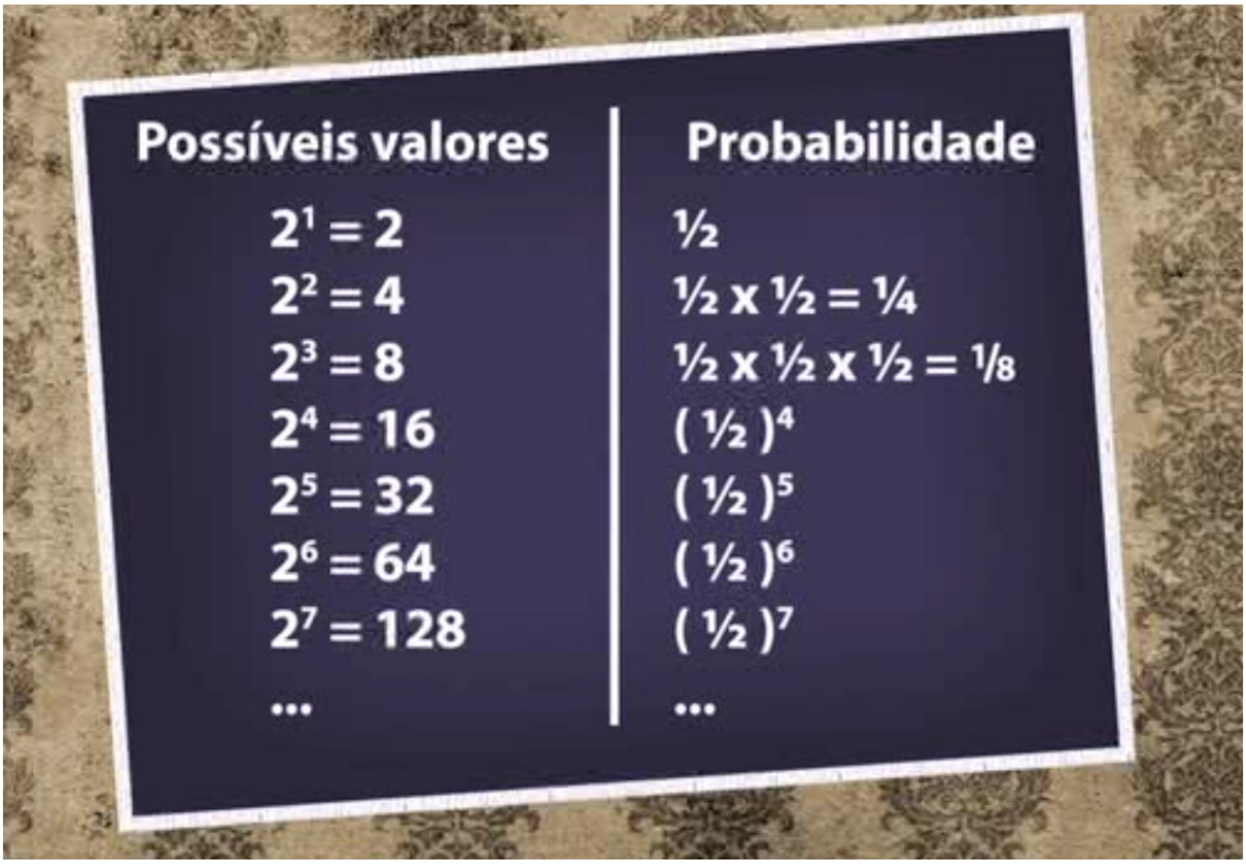

Figura 1. Possíveis valores e as respectivas probabilidades que Paulo receba em cada jogo

Digamos que você ganhasse R$ 1,00 (um real) para cada vez que aparecesse "cara", e que o jogo acabasse logo após a primeira "coroa". Quanto você esperaria receber?

O "valor esperado" (E) pode ser calculado como sendo:

$$E = 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots,$$

Que pode ser escrita de maneira genérica como a soma de $\frac{n}{2^n}$ para $n \geq 1$. A soma infinita resulta em 2. Verifique este resultado com uma calculadora.

Mesmo que você não saiba quantas vezes vai aparecer "cara", deve esperar ganhar apenas dois reais (R$ 2,00).

Mas, digamos que o valor a ser pago a cada ocorrência de "cara" não seja um valor fixo (apenas um real por acerto), mas que vá dobrando ao longo do jogo. Dessa forma, ao aparecer a primeira "cara" você ganharia R$ 2,00. Ao aparecer "cara-cara", você ganharia R$ 4,00. Ao aparecer "cara-cara-cara", você ganharia R$ 8,00... e assim sucessivamente. Qual seria o valor esperado? Certamente você não espera receber infinitos reais.

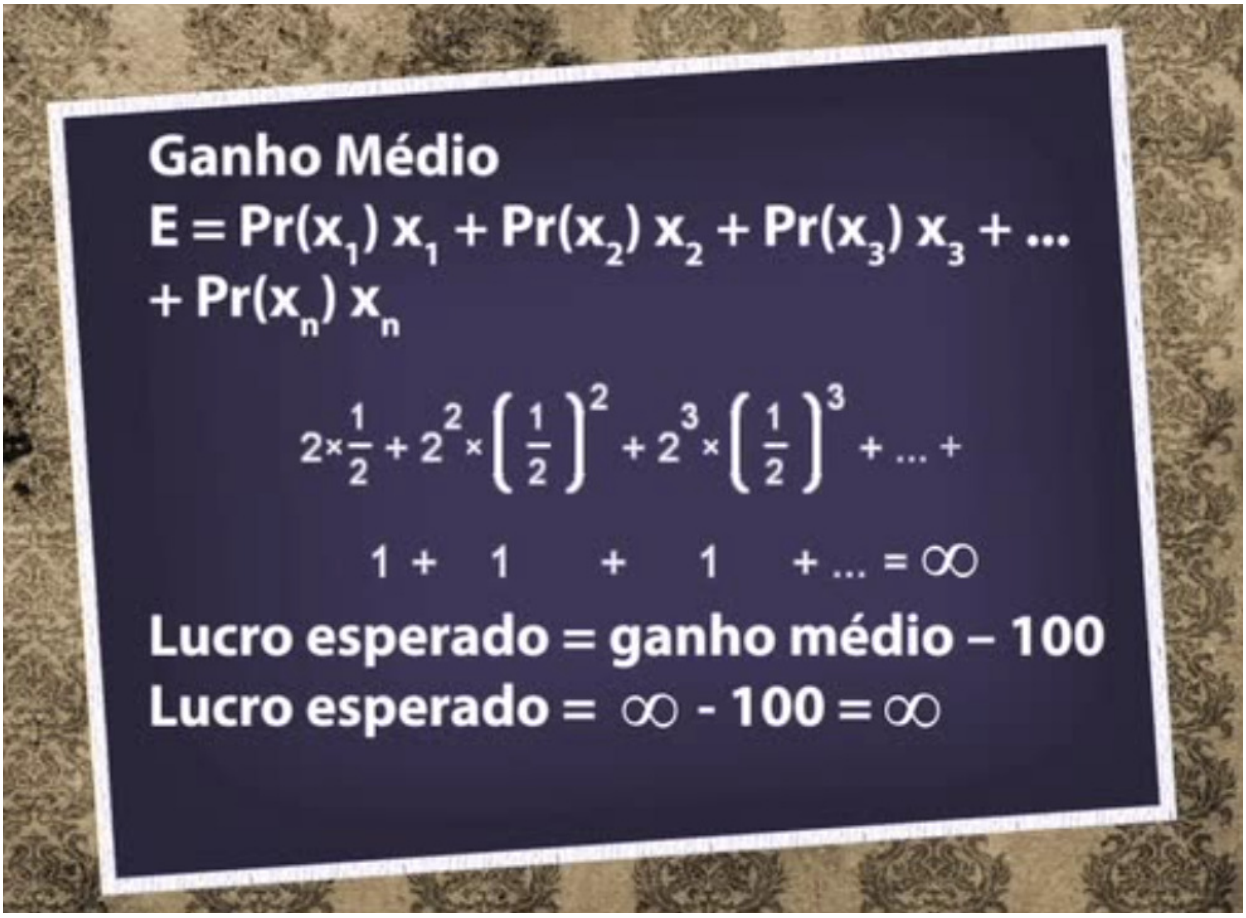

Figura 2. Lucro esperado no jogo de Paulo

A série, formada por infinitas parcelas iguais a 1, diverge. Isso ocorre porque o prêmio reservado para o sucesso cresce de maneira proporcional ao decréscimo da probabilidade do evento.

O que Paulo percebe a tempo de perder seu dinheiro é que a chance de ele recuperar seu dinheiro é muito baixa, porque, apesar do cálculo da esperança ser infinito, a probabilidade de se obter sete ou mais lançamentos é extremamente pequena.

Fazendo os cálculos, a cada mil jogos, Paulo teria apenas 16 chances de ganhar mais de cem reais.

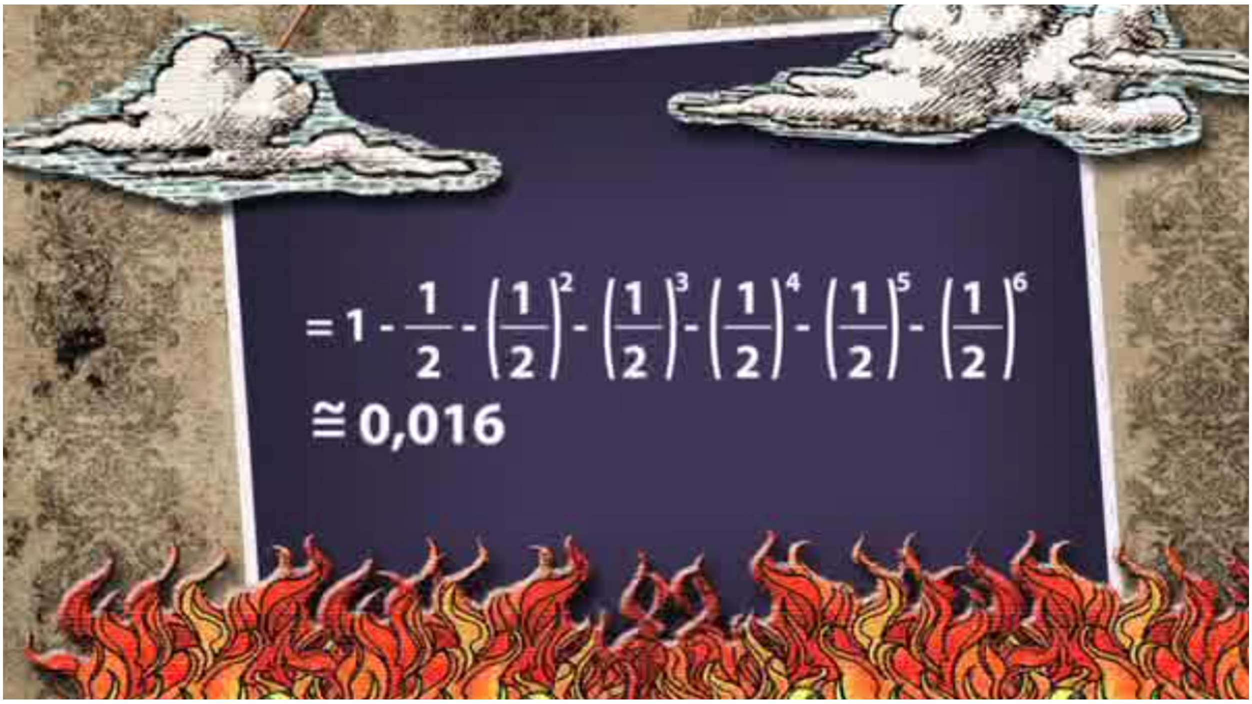

Figura 3. Probabilidade de Paulo obter 7 ou mais lançamentos

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos a revisão de probabilidade, e eventualmente passar o vídeo mais de uma vez após alguns exercícios propostos abaixo.

Depois da execução

Após a execução do vídeo, o professor poderia iniciar o estudo da esperança matemática e a teoria da escolha envolvendo o risco, dando ênfase às situações-problema que envolvam esse conceito e citar alguns exemplos de paradoxos.

Problema 1: Maria em seu novo emprego precisa escolher entre um salário de R$ 3000,00 e um salário baseado em lucros com as probabilidades mostrado na tabela abaixo:

Probabilidade	Lucro
30%	R$1000,00
20%	R$2000,00
10%	R$3000,00
20%	R$4000,00
20%	R$5000,00

As probabilidades foram obtidas a partir do histórico estatístico dos lucros. Qual opção salarial aceitar?

Solução:

O valor esperado do salário baseado nos lucros é:

$$E = 1000.\frac{30}{100} + 2000.\frac{20}{100} + 3000.\frac{10}{100} + 4000.\frac{20}{100} + 5000.\frac{20}{100} = 2800$$

O que significa que o valor esperado do salário baseado nos lucros é de R$ 2.800,00 que é inferior ao seu salário fixo proposto. Assim, se as probabilidades de lucro se confirmarem, é melhor optar pelo salário de R$ 3.000,00.

Problema 2: Consideremos duas alternativas:

> **Alternativa A:** Lança-se uma moeda. Se o resultado for cara então você ganha uma viagem à Paris. Se o resultado for coroa então você tem que pagar o dobro do valor da viagem.
>
> **Alternativa B:** lança-se um dado. Se o resultado for 1 ou 2 você nem ganha nem perde nada. Se for 3 ou 4 você ganha uma passagem para Paris. Se for 5 ou 6 você tem que pagar o dobro do valor da viagem.
>
> De qual das duas alternativas você escolheria participar?

Solução:

Em situações onde vários resultados distintos podem ocorrer embora não saibamos, de fato, qual ocorrerá, o conjunto de escolhas será constituído por distribuições de probabilidades sobre tais resultados.

Queremos ser capazes de exprimir a esperança sobre estas duas alternativas em termos da utilidade que é associada a cada resultado possível e a probabilidade que ele ocorra.

No exemplo, seja n_1 a utilidade de ganhar uma viagem à Paris, seja n_2 a utilidade de nem ganhar nem perder nada e seja n_3 a utilidade de pagar o dobro do valor da viagem. Cada pessoa atribui a utilidade para cada opção em acordo com as suas expectativas ou ambições. A utilidade é valor subjetivo.

Note que é razoável que se tenha que: $n_1 > n_2 > n_3$.

Desse modo, poderíamos exprimir a esperança associada à cada alternativa:

$E(A) = \frac{1}{2}.n_1 + 0.n_2 + \frac{1}{2}.n_3$ e $E(B) = \frac{1}{3}.n_1 + \frac{1}{3}.n_2 + \frac{1}{3}.n_3$

Assim, se para um determinado indivíduo: $n_1 = 100$; $n_2 = 50$ e $n_3 = 10$ então teremos que $E(A) > E(B)$.

Já para outro determinado indivíduo: $n_1 = 100$; $n_2 = 70$ e $n_3 = 10$ então teremos que $E(B) > E(A)$. Observe que

$$E(A) - E(B) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right).n_1 - \frac{1}{3}.n_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)..n_3 = \frac{1}{6}\left(n_1 - .n_2 + .n_3\right)$$

Que pode ser positivo, zero ou negativo dependendo dos valores das utilidades.

Sugestões de leitura

ARAUJO, A. - Introdução à Economia Matemática, IMPA, 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1984.

CASTRO, L. e J.H.FARO - Introdução à Teoria da Escolha, IMPA, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2005.

MAS-COLELL, WHINSTON e GREEN - Microeconomic Theory, Oxford Economic Press, 1995.

Ficha técnica

Autor *Luiz Antonio Mesquiari*
Revisor *José Plínio de Oliveira Santos*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*