Matemática Multimídia

Análise de dados e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

Prova de Alternativas

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir o assunto de eqüiprobabilidade
2. Aplicar conceitos de probabilidade condicional

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Ciência e Tecnologia
Ministério da Educação
Governo Federal

Prova de Alternativas

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade, probabilidade condicional, eqüiprobabilidade.

Duração
Aprox. 11 minutos.

Objetivos
1. Introduzir o assunto de eqüiprobabilidade
2. Aplicar conceitos de probabilidade condicional

Sinopse
O Marcelo descobre a probabilidade de passar em uma prova de múltiplas alternativas se ele simplesmente responder de maneira aleatória. Ao longo do vídeo uma informação importante sobre números não tão aleatórios e o cálculo das probabilidades de eventos equiprováveis.

Material relacionado
Áudios: *Fraude 171*
Software: *Probabilidade com urnas, Explorando o jogo do máximo*;
Experimento: *Apostas no relógio*;
Vídeos: *Coisas de Passarinho*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

No vídeo, Marcelo tem uma prova de múltiplas alternativas. Ele acha que, mesmo sem estudar, pode conseguir atingir a nota mínima apenas “chutando” as respostas. O vídeo desenvolve o cálculo da probabilidade para o Marcelo ser aprovado.

O vídeo tem um “Olha o curta” sobre Lei de Newcomb – Benford ou Lei do Primeiro Dígito é uma observação empírica da freqüência com que aparecem os dígitos iniciais em tabelas de constantes físicas, censos sociais ou valores de logaritmos. Em outras palavras, essa lei nos diz que a probabilidade de cada algarismo aparecer como primeiro dígito é uma função logarítmica do número correspondente ao algarismo e não 0,11, como seria de se esperar.

As probabilidades de cada algarismo aparecer como primeiro dígito seriam:

1: 0,30103
2: 0,176091
3: 0,124939
4: 0,09691
5: 0,0791812
6: 0,0669468

7: 0,0579919
8: 0,0511525
9: 0,0457575

A tabela publicada no artigo original de Benford de 1938 incluía dados como área de bacias fluviais, população de cidades, constantes fisicas, tiragem de jornais, calores específicos de substâncias puras, pressões de vapor de substâncias puras, taxas de mortalidade anuais, etc.

Essa lei é muito útil para se identificar fraudes em apurações de eleições, transações bancárias, etc.

Marcelo tenta, então, descobrir quais são suas chances de acertar seis das dez questões da prova.

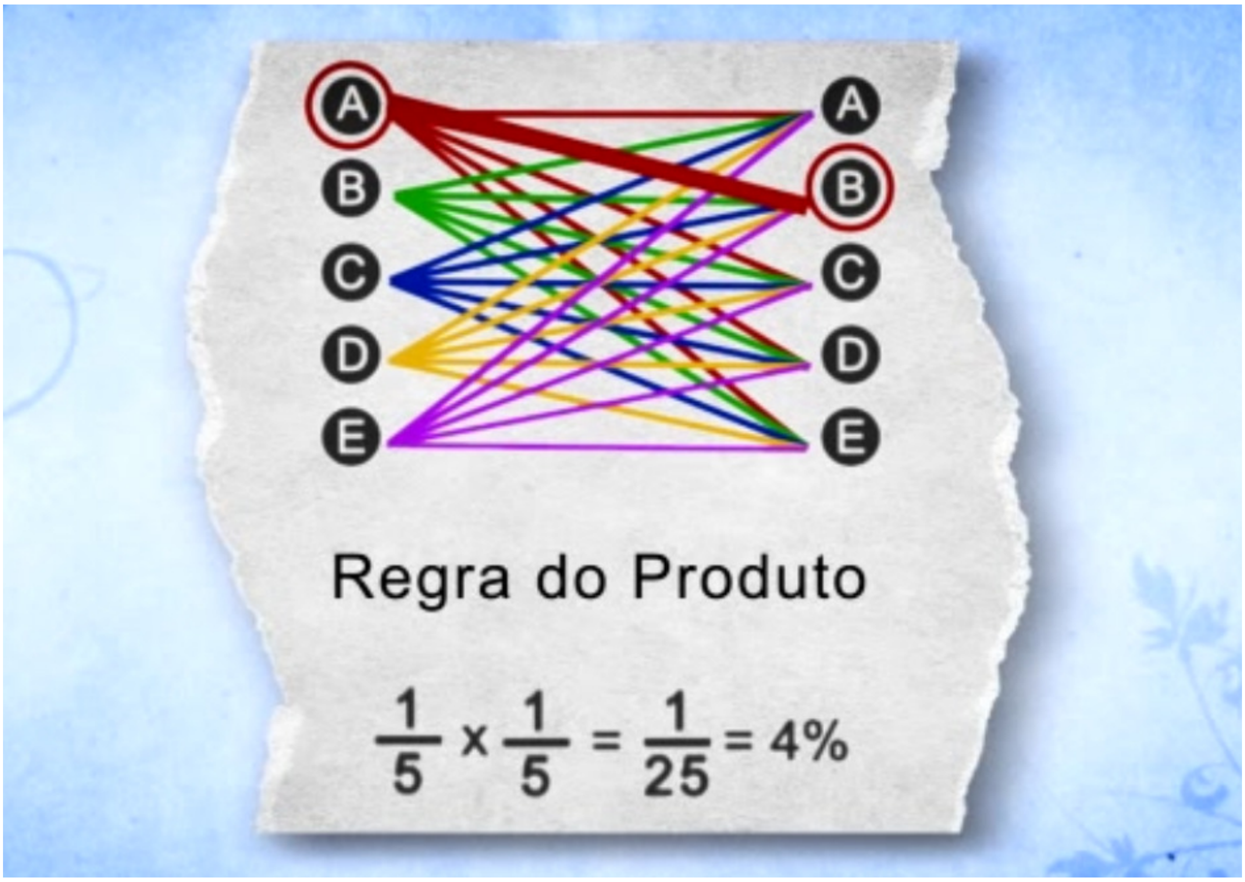

Figura 1. Ilustrando a Regra do Produto

Pela regra do produto, a probabilidade de que dois eventos independentes entre si aconteçam ao mesmo tempo é o produto de suas respectivas probabilidades. Dessa forma, a probabilidade de acertar duas questões é de $\frac{1}{5}.\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$.

Para acertar seis das dez questões, Marcelo conclui que a probabilidade acaba sendo então:

$$\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^6$$

Porém, esse raciocínio não está completo porque ele deveria considerar também em sua análise a probabilidade de erro das outras quatro questões.

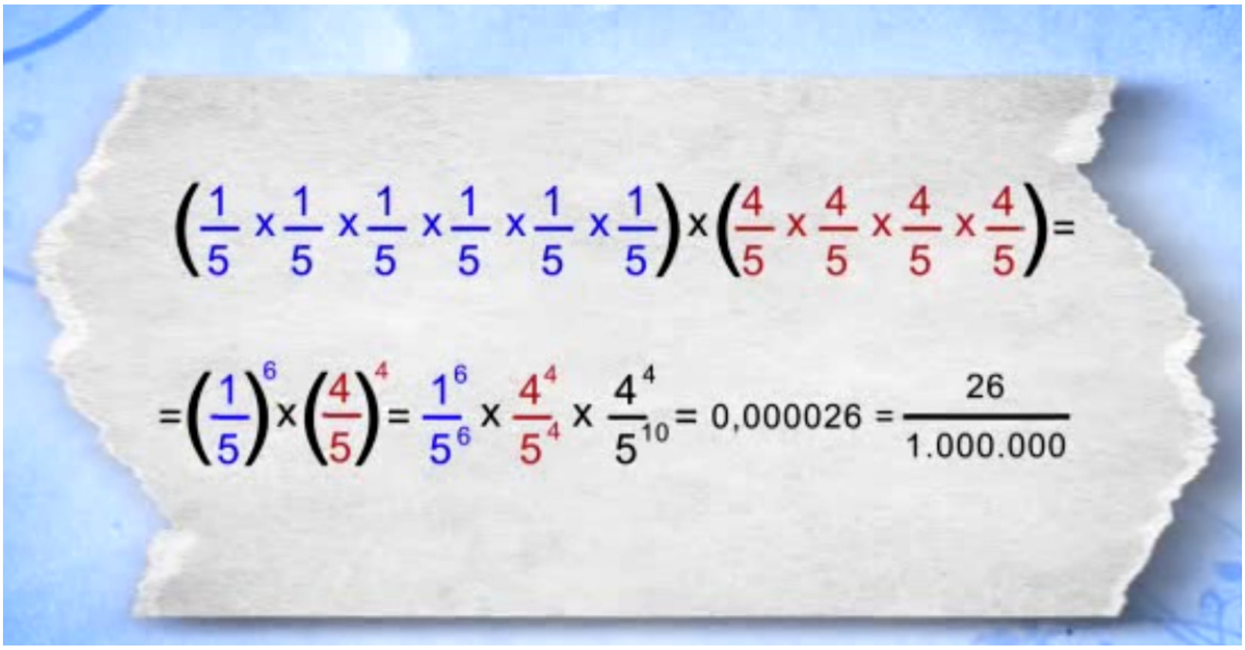

Figura 2. Regra do Produto

Ou seja, a probabilidade final de acertar seis das dez questões seria de $\frac{26}{10^6}$.

Deve-se lembrar ainda que esse cálculo considera apenas uma combinação das inúmeras possíveis: acertar exatamente as 6 primeiras questões e errar as quatro últimas. Mas o número de maneiras de acertar 6 questões quaisquer, e errar as outras 4, é $C_{10,6} = 210$.

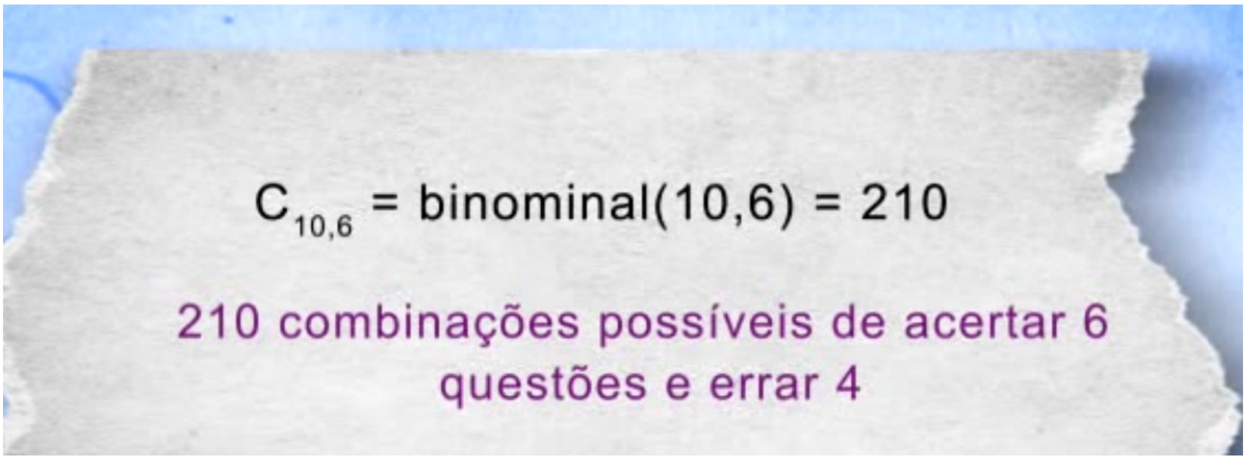

Figura 3. Binomial

Com esse número, chegamos ao resultado final, $\frac{5{,}46}{1000}$.

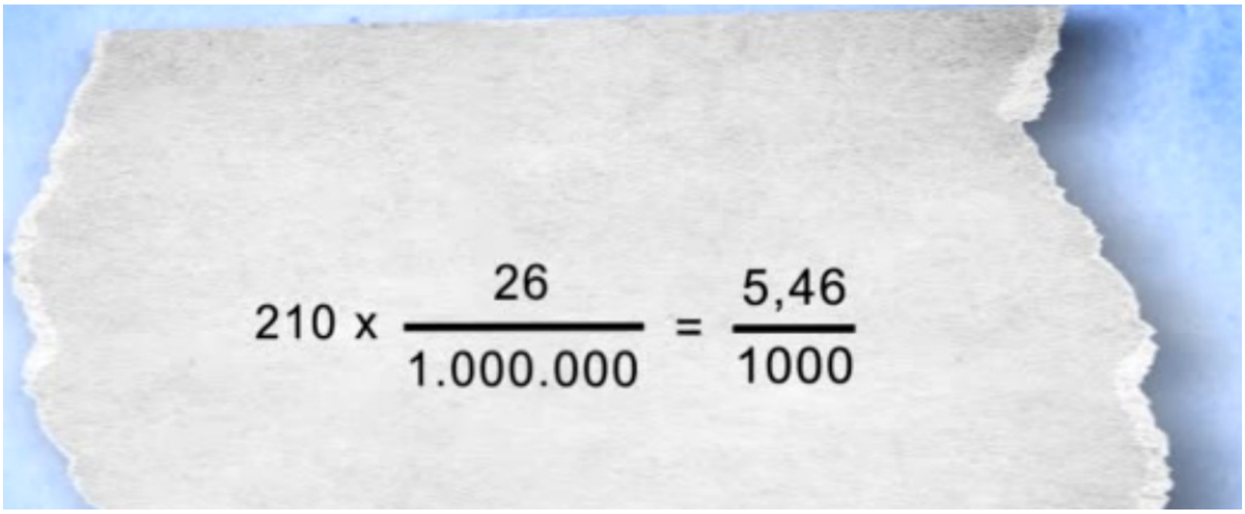

Figura 4. Probabilidade final

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos a revisão dos principais conceitos de Probabilidade e Análise Combinatória. Enfatizando que probabilidade representa uma série de eventos futuros cuja ocorrência é definida por alguns fenômenos físicos aleatórios. Este conceito poder ser dividido em fenômenos físicos que são previsíveis através de informação suficiente e fenômenos que são essencialmente imprevisíveis. Um exemplo para o primeiro tipo é uma roleta, e um exemplo para o segundo tipo é um vazamento radioativo.

Depois da execução

Após a execução do vídeo, o professor poderia iniciar o estudo de probabilidade, dando ênfase a situações-problemas que envolvam esse conceito.

Problema 1: Uma pesquisa indica que 30% das mulheres do Brasil consideram a leitura sua atividade favorita de lazer. Você seleciona ao acaso quatro mulheres e pergunta a elas se a leitura é sua atividade favorita de lazer. Obtenha a probabilidade de que:

a. exatamente duas delas respondam "sim";
b. pelo menos duas delas respondam "sim";
c. menos do que duas respondam "sim".

Solução

a. A probabilidade de exatamente 2 em 4 mulheres dizerem "sim" é o produto da combinação de 4 mulheres, tomadas duas a duas ($C_{4,2} = 6$), pela probabilidade de 2 dizerem "sim" ($0{,}30.0{,}30 = 0{,}30^2$) multiplicada pela probabilidade de 2 não dizerem "sim"($0{,}70.0{,}70 = 0{,}70^2$) , isto é:

$P(\text{exatamente 2 mulheres dizerem "sim"}) = P(2) = C_{4,2}.(0{,}30)^2(0{,}70)^2 = 0{,}265$

$\therefore P(\text{exatamente 2 mulheres dizerem "sim"}) = 26{,}5\%$

b. Dizer que pelo menos duas delas respondam “sim” é o mesmo que adicionar as probabilidades de que exatamente 2 ou 3 ou 4 mulheres respondam “sim”. E usando o mesmo raciocínio do item a, tem-se:

$P(\text{exatamente 2 mulheres dizerem "sim"}) = P(2) = C_{4,2}.(0{,}30)^2(0{,}70)^2 = 0{,}265$
$P(\text{exatamente 3 mulheres dizerem "sim"}) = P(3) = C_{4,3}.(0{,}30)^3(0{,}70)^1 = 0{,}076$
$P(\text{exatamente 4 mulheres dizerem "sim"}) = P(4) = C_{4,4}.(0{,}30)^4(0{,}70)^0 = 0{,}008$
$P(\text{pelo menos duas delas respondam "sim"}) = P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}35$

$\therefore P(\text{pelo menos duas delas respondam "sim"}) = 35\%$

c. Para obter a probabilidade de que menos do que duas mulheres respondam “sim”, deve-se obter a soma de $P(0)$ e $P(1)$.

$P(\text{exatamente nenhuma mulher dizer "sim"}) = P(0) = C_{4,0}.(0{,}30)^0(0{,}70)^4 = 0{,}24$
$P(\text{exatamente 1 mulher dizer "sim"}) = P(1) = C_{4,1}.(0{,}30)^1(0{,}70)^3 = 0{,}41$

$P(\text{menos do que duas respondam "sim"}) = P(0) + P(1) = 0{,}65$

$\therefore P(\text{menos do que duas respondam "sim"}) = P(0) + P(1) = 65\%$

Problema 2: Suponha que o gerente de uma Cia. aérea identifica que em média 7% dos 200 lugares de seus aviões ficam vazios por ausências no embarque. Caso esse gerente deseje fazer reservas a mais e correr o risco de *overbooking*, qual o risco que corre ao fazer reservas para 210 passageiros?

Solução

Para resolver esse problema pode-se pensar em uma fórmula geral, que consiste na multiplicação da combinação de 210 passageiros, tomadas n a n, onde n é o número que comparecem ao embarque, pela probabilidade dos lugares ocupados, multiplicada pela probabilidade dos 210 –n lugares vazios.

Fórmula Geral

$$P(\text{Número de passageiros que comparecem ao embarque}) = C_{210,n}.(0{,}93)^n(0{,}07)^{210-n}$$

Para determinar o risco que a Cia. aérea corre ao fazer reservas para 210 passageiros, basta calcular a probabilidade para 201, 202, ... , 210 passageiros e somar todas elas.

P (201) = 0,034

P (202) = 0,020

P (203) = 0,011

P (204) = 0,005

P (205) = 0,002

P (206) = 0,001

P (207) < 0,001 (muito pequeno)

P (207) < 0,001 (muito pequeno)

P (208) < 0,001 (muito pequeno)

P (209) < 0,001 (muito pequeno)

P (210) < 0,001 (muito pequeno)

$$\therefore P(risco) = P(201)+P(202)+P(203)+P(204)+P(205)+P(206)+P(207)+P(208)+P(209)+P(210)$$
$$\therefore P(risco) \approx 0{,}07$$

Ou seja, há uma probabilidade (risco) de 7% de acontecer um overbooking neste vôo.

Sugestões de leitura

LARSON, Ron; FARBER, Betsy. Estatística Aplicada . 1ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. ASSAF NETO, Alexandre. (2009) *Matemática Financeira e suas aplicações*. 11a ed. São Paulo: Atlas.

MORETTIN, Luiz Gonzaga. Estatistica Básica . 7ª ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

CRESPO, Antonio Arnot.. Estatística Fácil . 18ª ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

Morgado, A. C. Oliveira e outros. Análise Combinatória e Probabilidade – SBM

Santos, José Plínio et al. "Introdução à Análise Combinatória", 2008, 1ª Edição, Ciência Moderna.

Santos, José Plínio et al. "Problemas resolvidos de combinatória", 2007, 1ª Edição, Ciência Moderna.

Ficha técnica

Autor *Luiz Antonio Mesquiari*
Revisor *José Plínio de Oliveira Santos*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*