Matemática Multimídia

Análise de dados
e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

O príncipe de Sofia

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar o paradoxo dos três prisioneiros;
2. Trabalhar o conteúdo de probabilidade;
3. Apresentar um uso da regra de Bayes.

matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

O principe de Sofia

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade; Probabilidade Condicional.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar o Paradoxo dos três prisioneiros;
2. Trabalhar o conteúdo de Probabilidade.

Sinopse
O programa apresenta uma versão do paradoxo dos três prisioneiros. O vídeo mostra um príncipe que enfrenta dois adversários na fase final de um concurso cujo prêmio é se casar com a princesa Sofia. Nesta fase, cada candidato é trancado em um quarto. Vence quem estiver no quarto sorteado pela princesa. O príncipe então busca, com o auxílio de seu anjo da guarda e do cálculo de probabilidades, aumentar suas chances de ser sorteado.

Material relacionado
Software: *Explorando o jogo do máximo;*
Experimento: *Apostas no relógio*, *O Jogo da Trilha, Baralhos e Torradas.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa mostra um príncipe que enfrenta a última fase de um concurso para casar com a princesa Sofia. Nessa fase ele e seus dois concorrentes são trancados, cada um em um quarto, e aquele que estiver no quarto sorteado pela princesa será o vencedor.

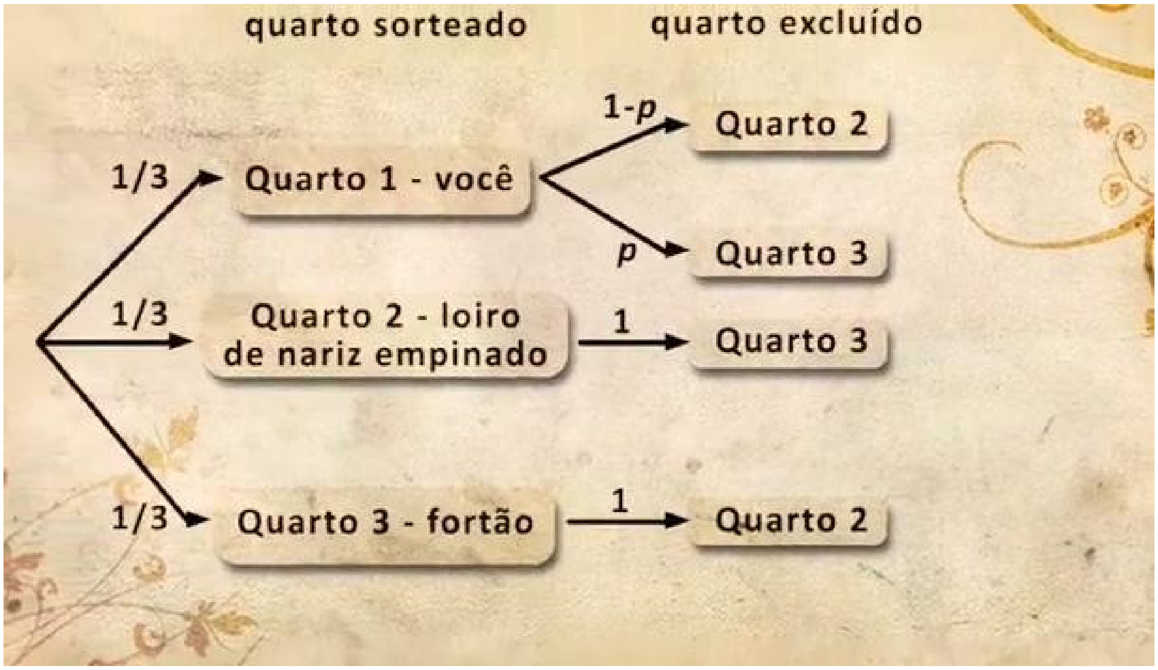
Inicialmente, o príncipe acredita que a probabilidade de que seu quarto, o quarto 1, seja sorteado é igual a 1/3.

Ao receber a informação de que o quarto 3 não foi sorteado, esta probabilidade é alterada.

Será que com esta informação o quarto 1 fica mais provável que o quarto 2? Ou vale a pena tentar trocar de quarto?

O príncipe debate estas opções com seu anjo da guarda, que recorre ao cálculo de probabilidades e à regra de Bayes para responder a esta pergunta.

Em primeiro lugar, analisemos o seguinte esquema, conhecido como árvore de probabilidade. Nele podemos representar as opções disponíveis com suas respectivas probabilidades.



Os primeiros três galhos da árvore representam as possibilidades para o quarto sorteado, que pode ser uma dos três quartos 1, 2 ou 3.

O príncipe assume inicialmente que todos têm a mesma probabilidade de serem sorteados igual a 1/3.

Os galhos seguintes representam as possibilidades para a informação a ser entregue pelo pajem sobre o quarto que foi excluído, condicional em cada uma das possibilidades anteriores.

Por exemplo, se o quarto sorteado foi o 1, então o pajem poderia contar que o quarto excluído foi o 2 ou o 3. No entanto, se o quarto 2 foi sorteado, então o pajem só poderia indicar que o quarto 3 foi excluído, já que ele não pode contar nada sobre o quarto 1.

O mesmo ocorre se o quarto 3 tiver sido sorteado.

Este raciocínio é representado pelos galhos do lado direito da árvore.

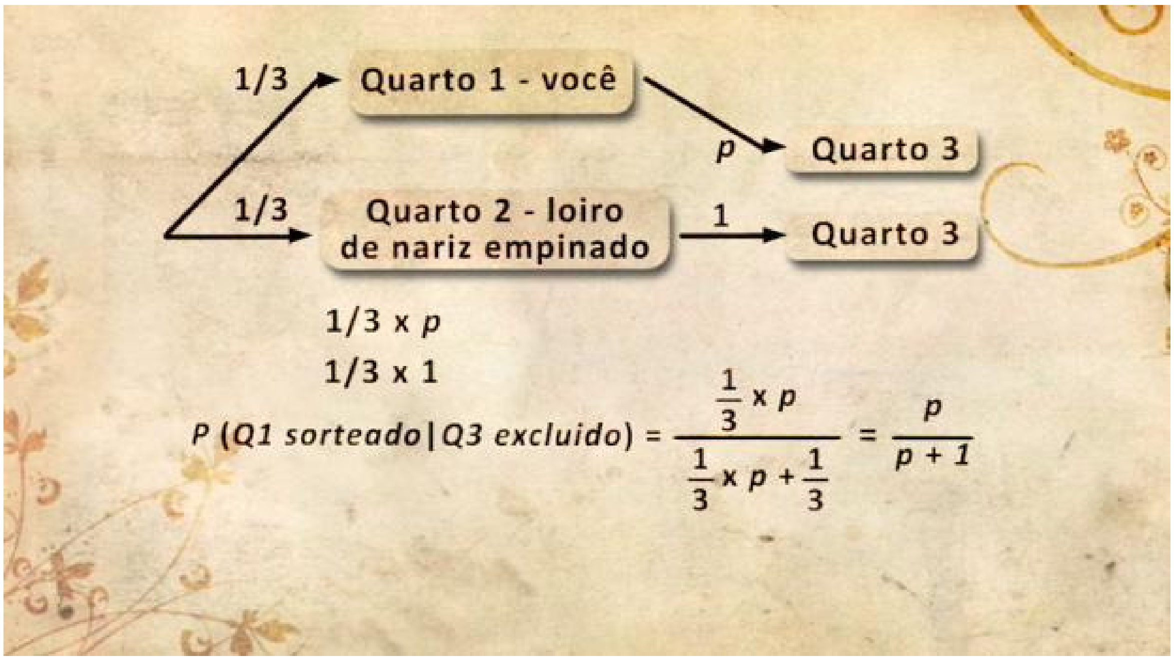
Para as duas últimas possibilidades, como só há uma opção, a probabilidade desta opção é igual a 1.

Para a primeira possibilidade, consideraremos uma solução geral, assumindo que a probabilidade de que o pajem dedure o quarto 3 é igual a p, onde p é um valor entre 0 e 1.

Depois de receber a informação do pajem de que o quarto 3 foi excluído, a árvore de probabilidades fica como na figura abaixo:

$$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B).$$

Ora, queremos calcular a probabilidade de o quarto 1 ser sorteado, dado que o quarto 3 não foi. Logo, pela fórmula acima,



Pela regra de Bayes, temos que a probabilidade do quarto 1 ter sido sorteado depois de saber que o quarto 3 foi excluído é igual à expressão p/(p+1).

Observe que esta probabilidade depende da probabilidade que atribuirmos para que o pajem dedure o quarto 3.

Por exemplo, se atribuirmos probabilidade p=1/2, ou seja, se acharmos que o pajem poderia indicar qualquer um dos quartos 2 ou 3, então a probabilidade do quarto 1 é igual a 1/3.

Ou seja, neste caso, esta informação não altera a probabilidade do quarto 1.

Mas se soubéssemos que o pajem gostaria que o candidato do quarto 2 fosse excluído, poderíamos atribuir uma probabilidade pequena de que o pajem dissesse quarto 3, $p \approx 0$, e neste caso, a probabilidade de que o quarto 1 seja o escolhido também seria próxima de 0.

No outro extremo, se acreditássemos que o pajem entregaria o quarto 3 com probabilidade alta, $p \approx 1$, então a probabilidade de que o quarto 1 seja o escolhido dada essa informação é próxima de ½ .

Em qualquer um dos casos, a probabilidade condicional do quarto 1 ser escolhido é menor que a do quarto 2, e portanto vale a pena tentar trocar de quarto.

Percebendo isso e imaginando que o príncipe gostaria de trocar de quarto, o pajem decide intervir a favor dele.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Ao lidar com probabilidades condicionais, muitas vezes chegamos a resultados que escapam à nossa intuição. Em geral, podemos chegar à resposta correta sendo cuidadosos ao estabelecer o problema dentro da teoria de probabilidades.

Sugerimos que o professor trabalhe alguns exemplos de probabilidades condicionais, como por exemplo, os experimentos *Apostas no Relógio* , *O Jogo da Trilha* ou *Baralhos e Torradas*.

Durante a execução

Sugerimos que nas partes em que aparece a árvore de probabilidades o professor pare o vídeo e analise as informações minuciosamente, e na parte onde o anjo se refere à regra de Bayes, que o professor relembre a expressão desta lei, que foi colocada na seção “Sobre o programa” desse guia.

Depois da execução

O problema apresentado no vídeo é conhecido como o Paradoxo dos Três Prisioneiros, Paradoxo das Três Portas ou Problema de Monty Hall.

Por que a porta que não escolhemos sempre tem maior probabilidade de ser a correta?

Este problema provocou uma grande discussão entre grandes nomes da matemática, nos anos 70, alguns defendendo que a probabilidade era a mesma, outros dizendo que era mais vantajoso trocar de porta.

A resposta que apresentamos aqui é a resposta que abarca as demais respostas apresentadas ao permitir um valor p variando entre 0 e 1, com interpretações para cada caso.

Outros problemas não triviais do cálculo de probabilidade podem ser encontrados no livro de Feller, e apresentados como desafios.

Sugestões de leitura

P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.
S. Hazzan(2004). Fundamentos de Matemática elementar vol. 5.
W. Feller (1976). Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações, vol I. Editora Edgard Blücher.
Site recomendado: ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada, http://alea-estp.ine.pt

Ficha técnica

Autor *Alison Melo*
Revisão *Laura Leticia Ramos Rifo*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*