



Matemática
Multimídia

Análise de dados
e probabilidade



Guia do Professor



Vídeo


O Jogo de Dados de Mozart

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Relacionar música e matemática;
2. Apresentar os fundamentos de análise combinatória e probabilidade;
3. Exibir uma aplicação prática de tais fundamentos.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP

O Jogo de Dados de Mozart

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Análise combinatória, probabilidade.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Relacionar música e matemática;
2. Apresentar os fundamentos de análise combinatória e probabilidade;
3. Exibir uma aplicação prática de tais fundamentos.

Sinopse

Com a ajuda de Luciano, seu amigo e professor, o estudante Luís descobre brincando que é possível e muito simples compor músicas usando apenas dois dados.

Material relacionado

Áudios: *Dados não transitivos*, *História da Probabilidade*;
Experimentos: *Caminhos e grafos*, *Jogo das amebas*, *Jankenpon*;
Softwares: *Probabilidades com urna*;
Vídeos: *Música quase por acaso*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo apresenta ao aluno os fundamentos de análise combinatória e probabilidade, discutindo de maneira bastante aplicada a respeito do princípio fundamental de contagem, combinações e probabilidade de eventos independentes. Na ficção, o estudante Luís descobre que é possível compor músicas usando apenas dois dados. Com a ajuda de um de seus professores, que lhe explica como isto funciona, entrega-se à tarefa de compor sua própria música, divertindo-se bastante.



Figura 1. Luciano e Luís conversam sobre o jogo de dados de Mozart.

A música é uma extraordinária forma de expressão artística e pode, entre outras de suas qualidades, transmitir emoções. Apesar disso, a música também pode ser encontrada ao longo da história como um produto de raciocínios lógicos ou ainda procedimentos mecânicos, isto é, como um procedimento algoritmo de um de um programa de computador. O processo de composição de melodias conhecido por “Jogo de Dados de Mozart”, cuja autoria é associada ao referido músico e compositor do século XVIII, é um bom exemplo disso. Neste jogo, dois dados são lançados simultaneamente e repetidamente, de modo que a cada soma de seus resultados corresponda um compasso, ou seja, um grupo de sons, tocados em um ritmo e andamento fixos durante toda a música. Estes compassos são determinados segundo a posição que tomarão numa seqüência de 16 deles, conhecida como minueto. Como há 11 possibilidades para a soma dos números de dois dados lançados, o motivo de cada compasso pode ser lido de uma tabela com $11 \times 16 = 176$ números aleatoriamente distribuídos correspondentes a 176 motivos musicais compostos por Mozart. A melodia que se deseja construir desta forma consiste de um minueto e de um trio, sendo este último também uma seqüência de 16 compassos, determinados de maneira análoga ao anterior, mas que se joga com apenas um dado e os motivos podem ser lidos de uma tabela com $6 \times 16 = 96$ motivos mozartianos. Na tabela, Mozart tomou o cuidado de compor compassos diferentes para o minueto e para o trio, de tal maneira que o número de composições possíveis de serem geradas é da ordem de $1029!$ Por causa disso, é praticamente impossível produzir duas músicas iguais.

Com a invenção e posterior popularização dos computadores, processos como este foram substituídos por outros ainda mais sofisticados. Há várias versões do Jogo de dados de Mozart na internet e continua sendo um excelente exemplo da aplicação da matemática às artes.

Sugestões de atividades

Antes da exibição do vídeo

Professor, alguns conceitos de análise combinatória e de probabilidade são tratados neste vídeo de uma maneira bastante aplicada e lúdica. Logo, antes de exibi-lo aos seus alunos, é interessante que você primeiro defina, introduza tais conceitos e trabalhe com eles a partir de exemplos simples, diferentes daqueles contidos neste vídeo. Certifique-se que seus alunos entenderam, entre outras coisas, como determinar o número de possibilidades de um dado acontecimento, ou ainda, o número de combinações que podem ser realizadas a partir de um conjunto de elementos (indistinguíveis ou não). Um conhecimento prévio dos fundamentos da análise combinatória e probabilidade poderão ajudar muito para que o aluno tenha um completo e rápido entendimento da dinâmica apresentada no vídeo.

Depois da exibição do vídeo

Professor, encerrada a exibição, procure esclarecer todas as possíveis dúvidas de seus alunos, aproveitando-se, também, para indagá-los a respeito do vídeo, principalmente sobre algum ponto ou fala que não ficou clara.

Abaixo descrevemos uma atividade muito parecida com a do vídeo e que trabalha com as mesmas noções de análise combinatória e probabilidade.

Atividade: Orquestra: *Alea Jacta Est!*

Divida sua classe em grupos de 6 alunos. Solicite na aula anterior ao vídeo que os alunos de cada grupo tragam de casa qualquer instrumento para fazer som e 3 dados por grupo. Os alunos de cada grupo podem combinar quais instrumentos trazer e incentive-os a ter criatividade na escolha dos mesmos. Pode ser qualquer coisa que faça som, “instrumentos musicais” quaisquer ou ainda, chocalhos, caixa de fósforos, folhas de papel que podem ser rasgadas, apitos, latas de

diferentes formatos e tamanhos, madeiras, etc. Claramente o professor deve trazer uns tantos para aqueles que “esqueceram”, bem como alguns dados a mais. A idéia aqui é que cada grupo de alunos experimente, na prática, como funciona probabilidade de maneira muito semelhante ao que acontece no vídeo. Cada grupo irá compor uma música aleatória (probabilística) e apresentá-la para os outros colegas. O procedimento para cada grupo de alunos é o seguinte:

1. Dê uns 5 minutos para que todos os alunos possam “compor” uma pequena seqüência de sons (motivos ou temas musicais) com seu instrumento. Não importa o ritmo, nem mesmo a qualidade musical, apenas que ele possa repetir a seqüências quantas vezes forem necessárias. Vai haver barulho, mas isto faz parte do jogo.

2. Em uma folha em branco os alunos desenham uma tabela de 6 linhas por N colunas, onde cada coluna corresponde a uma unidade de tempo, que chamaremos de compassos. Cada aluno vai tocar uma linha e somente a sua linha desta matriz. N vai determinar o tamanho da música. O professor pode definir N como, por exemplo, 10 (pequenas peças) até 20 (peças mais longas). Numere as linhas de 1 a 6, uma para cada aluno do grupo.

3. Os alunos são livres para escolher em cada lance de dados quantos instrumentos vão ser tocados em cada compasso. Sugerimos que eles façam um planejamento “timbrístico ou instrumental” da peça a ser composta escrevendo, de antemão, em cima de cada coluna de compassos o número de instrumentos a serem tocados naquele compasso. Escolher mais do que três instrumentos, por compasso, é bem interessante, mas pode ficar difícil para eles conseguirem tocar simultaneamente.

4. Um exemplo deixará claro o procedimento. Suponhamos que eles queiram iniciar a peça com apenas um instrumento. Então vamos ver quem toca o primeiro compasso. Alguém do grupo (e isto pode ser sempre mudado) joga o dado e se saiu, por exemplo, 4, então o aluno 4 toca o primeiro compasso com seu tema. Se no segundo compasso tocam 2 instrumentos então alguém joga 2 dados. Se o resultado for, por exemplo, 3 e 5, então tocam, neste compasso, os instrumentos 3 e 5. Se o resultado dos dados for dois números iguais, por exemplo, o

número 6, então somente o aluno 6 toca o seu tema. Se no próximo compasso tem 3 instrumentos, joga-se com 3 dados. As possibilidades aqui são as seguintes:

a) três números diferentes, digamos 1, 3 e 5 então tocam os alunos 1, 3 e 5.

b) dois números iguais, digamos 2, 2 e 4, então tocam somente os alunos 2 e 4.

c) três números iguais, digamos, 5, então toca somente o aluno 5.

5) Cada grupo escreve ou compõe a sua “matriz-partitura”. Se tiver tempo o professor pode permitir um pequeno ensaio de cada grupo. O grupo então executa a sua música composta aleatoriamente para a classe.

Obs.: Como alternativa, o professor pode também explicar o procedimento acima aos alunos e propor que cada grupo faça as composições como trabalho coletivo extraclasse. Assim eles podem fazer várias versões e ensaios e executar na classe aquela que eles mais gostarem.

6) Cálculo do número de possibilidades de músicas diferentes

Digamos que $N= 10$, escolhido pelo professor. Suponhamos que, para certo grupo, os números escolhidos de instrumentos nos compassos de 1 a 10 foram:

1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 3

Pergunte a classe quantas músicas diferentes aquele grupo poderia criar. A resposta é bem simples: como cada compasso é independente do anterior (eventos independentes), o resultado é

$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_{10}$, onde cada n_i é o número de possibilidades do compasso i . Esse número de possibilidades para cada compasso é, claramente, o número de combinações de 6 elementos tomados n_i a n_i . No exemplo acima temos então:

$$n_1=6, n_2=6, n_3=15, n_4=20, n_5=20, n_6=15, n_7=15, n_8=15, n_9=6, n_{10}=20$$

Daí o número de possibilidades de peças diferentes é um número enorme: $N=8,748 \times 10^{10}$.

7) Enfatize para os alunos o número de composições possíveis para cada grupo varia conforme a “instrumentação” que eles escolherem para cada compasso da peça bem como o tamanho N da peça.

8) Observe para os alunos que este número de possibilidades contempla duas peças que só difiram por um compasso, isto é, duas músicas que difiram por apenas um compasso, são contadas como diferentes no cálculo acima. Claramente do ponto de vista do ouvinte isto não é interessante. Dependendo do que se considere interessante, o número de possibilidades pode ser bem menor.

9) Uma típica Matriz-partitura é mostrada abaixo:

MATRIZ PARTITURA de uma peça

	1	1	2	3	3	2	2	2	1	3
A1				X		X			X	
A2	X			X		X		X		X
A3		X	X							X
A4			X		X		X	X		
A5					XX		X			
A6				X						X

Os A1, A2,..., A6 são os alunos de um grupo. O duplo XX na 5ª coluna significa que o resultado 5 saiu em dois dos três dados.

10) O professor pode ainda procurar na internet sites que têm o “Jogo de Dados de Mozart” que pode ser “jogado” online ou ainda pode ser baixado com um programa executável.

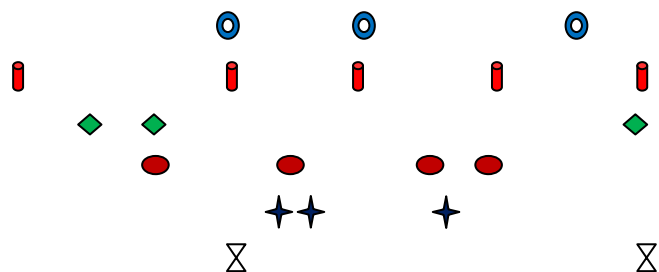
11) Para dar mais forma de uma partitura o professor pode sugerir que cada aluno associe uma figura qualquer, digamos uma figura geométrica, ao seu tema. Assim, por exemplo, pode-se associar:

$$A1 = \circ, A2 = \color{red}{\text{I}}, A3 = \color{green}{\blacklozenge}, A4 = \color{red}{\bullet}, A5 = \color{blue}{\blackspade}, A6 = \color{grey}{\boxtimes}$$

Matriz Partitura com símbolos geométricos

	1	1	2	3	3	2	2	2	1	3
A1				○		○			○	
A2	▮			▮		▮		▮		▮
A3		◇	◇							◇
A4			●		●		●	●		
A5				✦✦		✦				
A6				⊗						⊗

12) Abstraindo-se da tabela, isto é fazendo-a desaparecer obtemos belos diagramas coloridos como abaixo



Desafie os alunos a construírem seus diagramas coloridos e faça uma competição entre os grupos com um premio para: melhor composição e outro para o diagrama mais bonito.

13) O professor pode propor novas regras que proporcionarão novos cálculos combinatórios, por exemplo: se um aluno tocou, ele não poderá tocar de novo até que todos os outros toquem também. Incentive seus alunos a “inventarem regras de composição” e calcularem o número de possíveis peças com a restrição inventada. Observe que para certas restrições o cálculo pode ser complicado. De qualquer forma sempre vale a pena tentar ver até onde os alunos podem chegar neste Jogo de Dados de Mozart.

Sugestões de leitura

Sheldon Ross (2010). Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações. Artmed Editora.

Oscar J. Abdounnur (2006). Matemática e Música: O Pensamento Analógico na Construção de Significados. Escrituras Editora.

Ficha técnica

Autor *Douglas Mendes e Jônatas Manzolli*

Revisor *Adolfo Maia Jr.*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*

