Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Grande Hotel

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir o conceito de conjunto infinito.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Grande Hotel

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Conjuntos infinitos.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Introduzir conceito de conjunto infinito.

Sinopse
O gerente de um hotel que possui infinitos quartos contrata uma camareira para trocar as toalhas sujas pelas toalhas limpas de todos os infinitos quartos.
A cada dia ele se interessa em saber como ela efetuou seu trabalho.

Material relacionado
Áudios: *Infinito 1*, *Infinito 2;*
Vídeos: *Hotel Hilbert.*

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O vídeo conta a história de um gerente de um hotel que possui infinitos quartos. Ele contrata uma camareira que tem a tarefa de tirar as toalhas usadas dos infinitos quartos e colocar toalhas limpas em todos eles.

A cada dia ele se interessa em saber como ela desempenhou essa tarefa. No primeiro dia, ele pergunta à camareira pelo telefone como ela executou seu trabalho. A camareira explica passo a passo como efetuou seu trabalho, concluindo, assim, que deixou alguns quartos nos quais as tolhas não foram substituídas.

No segundo dia, ele pergunta novamente, após o expediente, como desempenhou seu serviço. A camareira lhe fala como fez as trocas e de novo reconhece que ficaram ainda quartos sem que as toalhas fossem trocadas.

No terceiro dia, ela, muito feliz, conta ao gerente como trabalhou. E ela faz com que ele entenda que agora com essa nova forma de trabalhar ela conseguiu trocar todas as toalhas de todos os infinitos quartos.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Como se trata de um conceito que não é abordado na maioria dos livros didáticos, o conceito de conjunto infinito fica vago e muitas vezes não sabemos como tratá-los.

O surgimento do conjunto dos números naturais veio da necessidade de se contar objetos. Caracterizar tais conjuntos e verificar as diferenças entre eles é trabalhado na maioria dos livros didáticos, assim como fazer operações com eles e elementos deles.

Foram os gregos que começaram a preocupar-se com os conjuntos infinitos na tentativa de responder à questão "quantos ... ?". Aristóteles (384-322 a.C.), que escreveu sobre o assunto, distinguia o infinito potencial do infinito atual, uma distinção ainda hoje importante. Por exemplo, o conjunto dos números naturais é potencialmente infinito porque, dado um número natural qualquer, sempre é possível adicionar a ele uma unidade e obter, assim, outro número natural. Por outro lado, quando dizemos que a reta é um conjunto infinito de pontos, estamos aceitando a ideia de infinito atual, que vem a ser um infinito já plenamente existente. Contudo, Aristóteles, e os gregos de um modo geral, só aceitavam o infinito potencial, e essa ideia incorporou-se à matemática tão fortemente que só no final do século XIX o infinito atual começou a ser aceito - não sem gerar muitas polêmicas.

No Século XVII, Galileu Galilei (1564-1642) esteve perto de aceitar a ideia de infinito atual. Numa de suas incursões à matemática, Galileu teve a ideia de emparelhar os elementos do conjunto $N=\{1,2,3,...,n,...\}$, dos naturais positivos, com os do conjunto $A=\{1,4,9,...,n^2,...\}$, dos quadrados perfeitos de números naturais positivos, da seguinte maneira:

$1 \rightarrow 1$

$2 \to 4$

$3 \to 9$

...

$n \to n^2$

Ou seja, emparelhou cada número natural positivo com seu quadrado. Isso o levou a observar que não há mais números naturais positivos do que quadrados perfeitos e vice-versa, já que todo quadrado tem sua raiz e nenhuma raiz tem mais do que exatamente um quadrado. Então, o conjunto A teria tantos elementos quantos IN*, apesar de ele mesmo, A, ser parte deste último? Como esse paradoxo contrariava princípios matemáticos e até filosóficos da época, Galileu não foi além.

Em 1879, porém, o matemático russo Georg Cantor (1845-1918), que via na liberdade da essência da matemática, começou a usar o conceito de correspondência biunívoca para estender a noção de cardinalidade aos conjuntos infinitos. Se dois conjuntos, como IN* e A, considerados anteriormente, podem ser colocados em correspondência biunívoca (emparelhados um a um), diz-se que eles têm a mesma cardinalidade. A teoria dos conjuntos, como tópico matemático independente, iria nascer dos esforços de Cantor nas duas décadas seguintes para explorar essa definição.

Com essa abordagem, que pressupõe a ideia de infinito atual, Cantor conseguiu a notável proeza de hierarquizar o infinito. Mostrou, entre outras coisas, que IN, **Z** e IQ têm a mesma cardinalidade e que IR tem cardinalidade “maior” que a de IN.

Depois da execução

Após a execução do vídeo, seria interessante o professor comentar algumas passagens importantes do vídeo, caso tenha notado alguma reação da parte dos alunos.

Além disso, deve enfatizar que o infinito não é um número e que não podemos, por exemplo, realizar operações como multiplicação e soma envolvendo infinito.

Algo interessante que poderia ser comentado também, apenas usando o conceito intuitivo, é o conjunto das partes: dado um conjunto qualquer, sempre se consegue um maior que contém esse inicial. Podendo obter, assim, infinitos conjuntos.

Sugestões de leitura

Elon Lages Lima. Análise Real, vol.1 .
Iezzi Gelson, Dolce Osvaldo. Matemática Ciencia e aplicações. 1. 2004. Editora Atual.

Ficha técnica

Autor *Vanessa Silva Pereira Araujo*
Revisor *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*