



Matemática
Multimídia

Números
e funções



Guia do Professor



Vídeo

Gabarito Secreto

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Mostrar uma aplicação simples de matrizes envolvendo multiplicação e cálculo da matriz inversa;



UNICAMP

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

Governo
Federal

Gabarito Secreto

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Matriz Inversa, Multiplicação de Matrizes

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Mostrar uma aplicação simples de matrizes envolvendo multiplicação e cálculo da matriz inversa;

Sinopse

Uma jovem, estudando para uma prova de Matemática, se depara com algumas matrizes que parecem ser uma mensagem criptografada contendo as respostas da tal prova. Com a ajuda do irmão, ela tenta decodificar a mensagem e acaba aprendendo um pouco sobre matrizes.

Material relacionado

Vídeos: *Cooperativa de Leite, Bombons a Granel*.
Experimento: *Mensagens Secretas com Matrizes*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este programa trata de um método de criptografia muito simples envolvendo multiplicação de matrizes. Ele funciona da seguinte maneira:

- 1) Primeiro criamos uma correspondência entre cada uma das letras do alfabeto (e outros caracteres que sejam necessários, como o espaço) e um número;

a = 1	b = 2	c = 3	d = 4
e = 5	f = 6	g = 7	h = 8
i = 9	j = 10	l = 11	m = 12
n = 13	o = 14	p = 15	q = 16
r = 17	s = 18	t = 19	u = 20
v = 21	x = 22	z = 23	espaço = 24

- 2) Convertemos o texto da mensagem original em uma sequência de números usando essa correspondência e a quebramos em duas linhas para montar uma matriz como a indicada abaixo;

m	e	n	s	a	g	e	m	
		s	e	c	r	e	t	a



12	5	13	18	1	7	5	12	24
24	24	18	5	3	17	5	19	1

3) Escolhemos uma matriz 2x2 para servir como chave;

2	1
4	3

4) Multiplicamos pela esquerda a matriz obtida no segundo passo pela chave. O resultado é a mensagem criptografada.

2	1
4	3

X

MENSAGEM

35	22	64	41	23	50	17	14	14
75	64	152	101	51	124	35	40	42

Em relação ao terceiro passo, há um detalhe importante que é mencionado rapidamente no vídeo, mas merece mais cuidado: a matriz escolhida para servir como chave deve ter inversa para que a decodificação da mensagem seja possível. A condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada tenha inversa é que seu determinante seja diferente de zero.

Por exemplo, se usarmos a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ como chave (note que seu determinante é zero), ao multiplicarmos pela direita as colunas $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Portanto, a coluna na mensagem codificada a partir dessas duas colunas iniciais será a mesma, o que gera uma ambiguidade indesejável e por isso deve-se excluir as matrizes com determinante igual a 0 como chaves.

Matematicamente, isso ocorre porque a transformação obtida pela multiplicação por uma matriz com determinante igual a 0 não é injetora, ou seja, dois elementos do domínio podem ter a mesma imagem. Portanto essa transformação não injetora não admite uma transformação inversa, isto é, não é possível obter a matriz inversa para realizar a decodificação da mensagem.

Na seção 4.5 do livro “A Matemática do Ensino Médio, vol. 3” há uma discussão mais detalhada sobre a relação entre o determinante de uma matriz e a possibilidade de obter a matriz inversa desta.

Voltando ao vídeo, como a matriz chave tem determinante diferente de zero, os personagens precisam calcular a matriz inversa para poderem decodificar a mensagem. Para tanto, os personagens lançam mão de uma matriz genérica com as mesmas dimensões da chave e utilizam a definição de matriz inversa:

Definição: Seja M uma matriz quadrada de ordem n , chamamos de M^{-1} , ou matriz inversa de M , a matriz tal que $M \times M^{-1}$ e $M^{-1} \times M$ são iguais à matriz identidade de ordem n .

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I$$

Com isso, os personagens montam um sistema linear envolvendo os quatro elementos da matriz genérica, e depois de resolver esse sistema, conseguem obter a mensagem secreta, cujo conteúdo era bem diferente do esperado!

Pelo conteúdo e abordagem empregada, consideramos que esse vídeo pode ser utilizado para introduzir matrizes inversas, depois que os alunos já tenham domínio sobre as definições e operações básicas de soma, multiplicação e determinantes de matrizes.

Sugestões de atividades

Durante a execução

Por volta do meio do vídeo, quando os personagens começam a discutir o método de codificação da mensagem que deve ter sido usado por Fausto, o ritmo do diálogo está rápido demais para expectadores que não conheçam o método. Isso foi necessário devido a restrições de tempo e para manter uma dinâmica de diálogo atraente.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por causa disso, pode parecer necessário pausar o vídeo neste momento para uma explicação mais detalhada, contudo, recomendamos continuar vídeo e desenvolver o assunto com os alunos e, até mesmo repetir esta parte com pausas.



Observamos também que por volta dos 5min30s, o irmão da menina responde afirmativamente à pergunta feita por ela dizendo que é sempre possível resolver uma equação matricial. Em geral isto não é verdade. Tanto que mais tarde ele mesmo diz que nem

toda matriz tem inversa. Na realidade as matrizes M_a e M_b nem precisam ser quadradas, muito menos ter inversa. E se não há inversa a equação matricial correspondente pode não ter solução. Dessa

forma, as afirmações do vídeo devem ser consideradas com cautela, para matrizes quadradas e uma classe dessas tem inversa, como apresentado nesse Guia.

Depois da execução

Primeiramente, sugerimos retomar o passo-a-passo do método utilizado para codificar a mensagem original com os alunos, para ter certeza de que todos compreenderam. Se for necessário, o método utilizado para encontrar a matriz inversa no vídeo é explorado com mais calma e através de vários exemplos na seção 15 do capítulo 22 do livro “Matemática – contexto e aplicações”.

Depois disto, o vídeo abre portas para diversas atividades envolvendo o método apresentado que podem ser utilizadas para fixar e exercitar as operações com matrizes e o cálculo de matrizes inversas, bem como para agregar significado para estes tópicos.

Uma sugestão de atividade é dividir a sala em grupos e pedir que cada grupo crie uma mensagem e uma chave e depois passe a mensagem criptografada para o grupo ao lado, que deverá tentar descobrir o conteúdo da mensagem original. Sugerimos que todos os grupos usem a mesma tabela de correspondência entre letras e números, caso contrário, a obtenção da mensagem original se torna mais difícil e demandará outros recursos que não foram discutidos no vídeo.

Sugestões de leitura

Tamarozzi, A. C.. *Codificando e Decifrando Mensagens*. Coleção **EXPLORANDO ENSINO DE MATEMÁTICA**, vol. 3. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php/?option=com_content&view=article&id=12314 (acessado em 19/04/2010)

Lima, E. L. et. al. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**, vol. 3. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

Dante, L. R. **MATEMÁTICA – CONTEXTO E APLICAÇÕES**. Editora Ática, São Paulo.

Ficha técnica

Conteudista *Leonardo Barichello*

Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Caio José Colletti Negreiros*

Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*

