



Matemática
Multimídia

Números
e funções



Guia do Professor



Vídeo

Dinâmica de Grupo

Série Matemática na Escola


Objetivos

1. Apresentar os números de Catalan



UNICAMP

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 

Dinâmica de Grupo

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Sequências; números de Catalan

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Apresentar os números de Catalan

Sinopse

Ao conduzir uma dinâmica de grupo, uma questão surge: de quantas maneiras um polígono pode ser dividido em triângulos?

Material relacionado

Vídeos: *Código de Pascal*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O protagonista tem a idéia de explorar formas geométricas nas dinâmicas de grupo conduzidas por ele.



Dessa vez, ele decide usar o triângulo. A pergunta que surge, então, é: de quantas maneiras um polígono pode ser dividido em triângulos? Para isso, ele estabelece as seguintes regras:

- as linhas não podem se cruzar;
- e todos os vértices dos polígonos serão vértices dos triângulos.

Esse problema relaciona-se com os números de Catalan:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

Estes números são assim chamados devido ao belga Eugène Charles Catalan (1814–1894).

Os números de Catalan não fazem parte de programas de Ensino Médio. No entanto, a forma sistemática utilizada é um exemplo muito útil para os alunos aprenderem contagem em geral.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos a revisão de Sequências Numéricas e do Triângulo de Páscal.

Depois da execução

Após a execução do vídeo, o professor poderia iniciar o estudo dos Números de Catalan, detalhando os exemplos apresentados e mostrando outros casos interessantes.

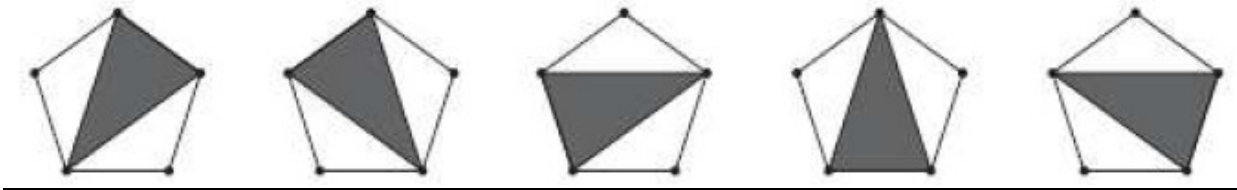
Os números de Catalan descrevem a solução de muitos problemas de Análise Combinatória. Destacamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1 : O número de maneiras de dividir um polígono de $n+2$ lados em n triângulos.

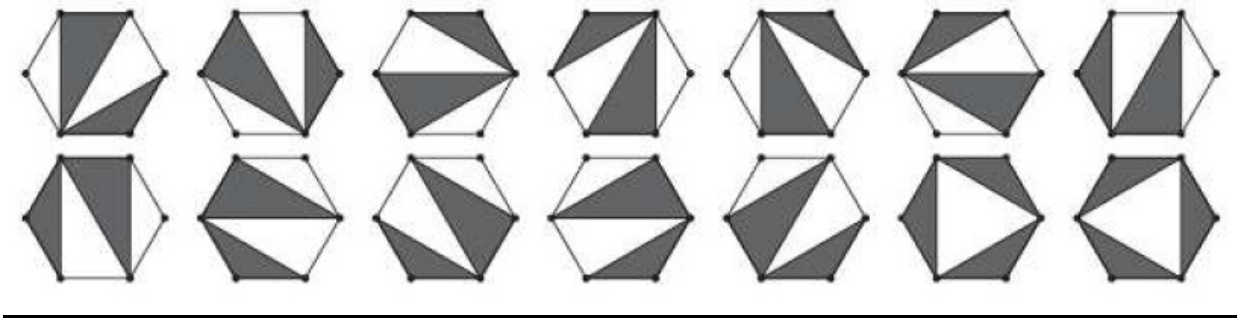
4 lados, 2 maneiras



5 lados, 5 maneiras



6 lados, 14 maneiras



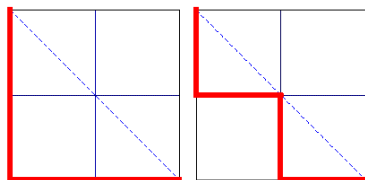
Exemplo 2 : O número de maneiras distintas de colocar n parênteses numa sequência de $n+1$ fatores, para agrupá-los dois a dois.

	Maneiras
$n = 1$	$(a \cdot b)$
$n = 2$	$((a \cdot b) \cdot c), (a \cdot (b \cdot c))$
$n = 3$	$((((a \cdot b) \cdot c) \cdot d), ((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)), ((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d),$ $(a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)), (a \cdot (b \cdot (c \cdot d)))$
$n = 4$	$(((((a \cdot b) \cdot c) \cdot d) \cdot e), (((a \cdot b) \cdot c) \cdot (d \cdot e)), (((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot e),$ $((a \cdot b) \cdot ((c \cdot d) \cdot e)), ((a \cdot b) \cdot (c \cdot (d \cdot e))), (((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d) \cdot e),$ $((a \cdot (b \cdot c)) \cdot (d \cdot e)), ((a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)) \cdot e), ((a \cdot (b \cdot (c \cdot d))) \cdot e),$ $(a \cdot (((b \cdot c) \cdot d) \cdot e)), (a \cdot ((b \cdot c) \cdot (d \cdot e))), (a \cdot ((b \cdot (c \cdot d)) \cdot e)),$ $(a \cdot (b \cdot ((c \cdot d) \cdot e))), (a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e))))$

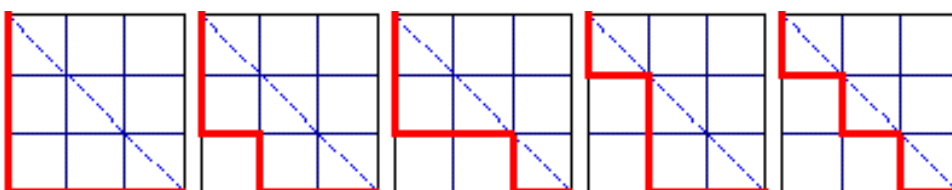


Exemplo 3 : O número de caminhos de comprimento $2n$ que podem ser feitos num tabuleiro quadriculado $n \times n$, desde que não ultrapasse a diagonal principal.

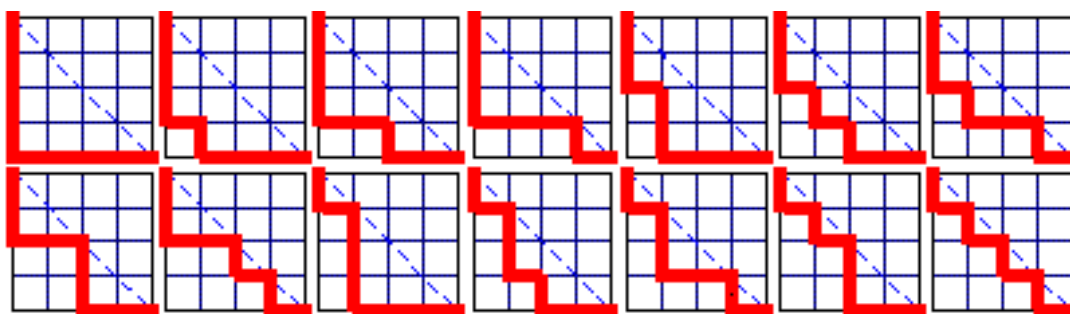
Tabuleiro 2x2:



Tabuleiro 3x3:



Tabuleiro 4x4:



Exemplo 4 : O número de palavras de DYCK de comprimento $2n$.

Uma palavra de DYCK de comprimento $2n$ é uma cadeia de caracteres do tipo $\underbrace{XXX \dots X}_{nX} \underbrace{YYY \dots Y}_{nY}$, de forma que não haja uma quantidade inicial que contenha mais Y do que X .

Tem-se 1 palavra de DYCK de comprimento 2; 2 de comprimento 4; 5 de comprimento 6; 14 de comprimento 8, e assim por diante.

XY
XYXY, XXYY
XYXYXY, XYXXYY, XXYYXY, XXYXYY, XXXYYY
XYXYXYXY, XYXYXXYY, XYXXYXY, XYXXXYYY, XYXYXXY XYXXYXY, XYXXYXY, XYXXYY, XYYYXXY, XXYXYXY XYYYXXYY, XXYYXYXY, XXXYXYYY, XXXXYYY

Exemplo 5 : Interpretando os símbolos X e Y (na palavra de DYCK), respectivamente, como um parênteses aberto e fechado, a seqüência de Catalan determina o número de expressões que contém n pares de parênteses corretamente colocados.

$n = 1$	()
$n = 2$	()(), (())
$n = 3$	()()(), ()(()), (())(), (())(), ((()))
$n = 4$	()()()(), ()()(), ()()()(), ()()()(), ()((())), (())()(), (())(), (())()(), ((()))(), (())()(), (())(), ((())()), ((())()), (((())))

Em seguida, o professor poderia apresentar as variadas formas para obter os números de Catalan (C_n).

$$i. C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{\binom{2n}{n-1}}{n} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

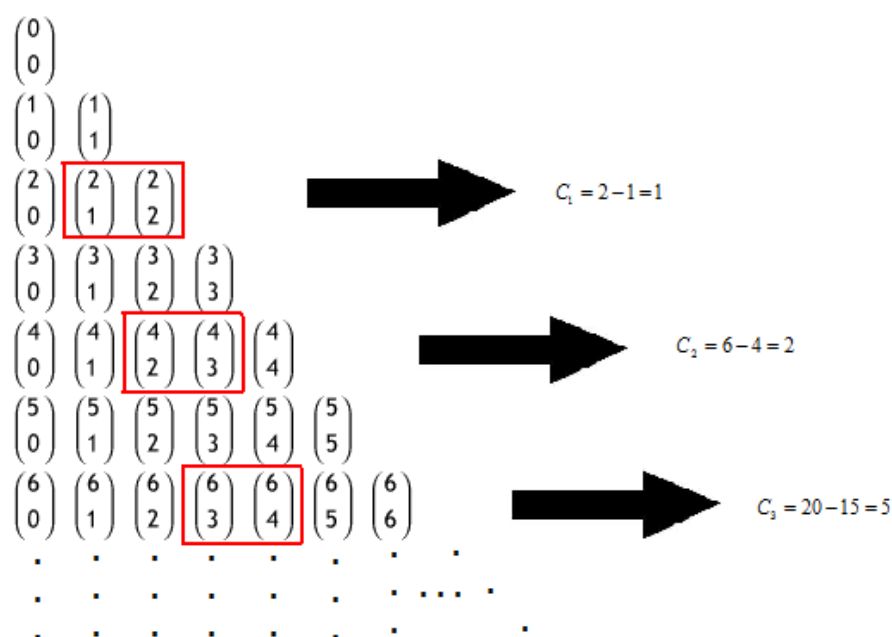
$$ii. C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

$$iii. C_n = \sum_{k=0}^{n-1} (C_k C_{n-k-1}) \quad , \text{ com } n \geq 1 \text{ e } C_0 = 1$$

$$iv. C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} \cdot C_{n-1} \quad , \text{ com } n \geq 2 \text{ e } C_1 = 1$$

Pode-se observar que (ii) mostra que a seqüência de Catalan pode ser obtida no Triângulo de Pascal (C_n é a diferença entre o elemento da

coluna central na linha par e o elemento da coluna posterior na mesma linha); enquanto que (iv) é de recorrência.



Poderá ser sugerido ao aluno verificar a equivalência das fórmulas acima relacionadas.

Sugestões de leitura

IEZZI, G. e outros. Matemática, ciência e aplicações – Vol.2 . Atual Editora

MACHADO, A.S. Temas e Metas – Vol. 2. Atual Editora

SANTOS, J.P. e outros. Introdução à Análise Combinatória – ED. CIÊNCIA MODERNA

STANLEY, R.P.. ENUMERATIVE COMBINATORICS – VOL –2.

Ficha técnica

Autor *Luiz Antonio Mesquiari*

Revisor *José Plínio de Oliveira Santos*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*

