Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

Comendo números

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar um exemplo de um sistema linear de equações por meio de um exemplo de uma dieta alimentar;
2. Apresentar o método de Gauss para resolver sistema de equações.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

Comendo números

Série
Matemática na Escola

Conteúdo
Sistema linear de *n* equações lineares a *m* incógnitas.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar um exemplo de um sistema linear de equações por meio de um exemplo de uma dieta alimentar;
2. Apresentar o método de Gauss para resolver sistema de equações.

Sinopse
Um jovem sente-se muito cansado ao treinar e fala com a nutricionista do clube. Ela sugere uma dieta com lipídios, quilocalorias e proteínas suficientes para as atividades esportivas. Para determinar a quantidade de porções de cada um dos itens acima, ela monta um sistema linear de 3 equações a 3 incógnitas. Para encontrar a solução, eles usam o método de eliminação de Gauss.

Material relacionado
Áudios: *Caminhões para o transporte*;
Experimentos: *Mensagem secreta com matrizes*;
Vídeos: *Guardador de águas;*
Softwares: *Aviões e matrizes*.

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda um problema de encontrar quantidades de certos alimentos para serem ingeridos por dia por um jovem. O programa gera um sistema linear de três equações lineares a três incógnitas. Essas soluções são encontradas pelo método de eliminação de Gauss. Na realidade, o sistema linear gerado no programa foi transformado num sistema linear equivalente na forma

$$ax + by + cz = d$$

$$ey + fz = g$$

$$hz = i.$$

Da terceira equação obtemos z e, por substituição, y na segunda e x na primeira.

Note que o sistema final tem a matriz dos coeficientes, triangular superior. O método de Gauss consiste exatamente em transformar o sistema linear em um sistema linear equivalente, cuja matriz dos coeficientes é triangular superior.

Esta transformação do sistema linear inicial em um sistema linear equivalente se baseia em três transformaçõe s elementares que são as seguintes:

T 1 – Um sistema não se altera quando permutamos as posições de duas equações quaisquer do sistema.

T2 – Um sistema não se altera quando multiplicamos qualquer uma de suas equações por um número real não nulo.

T3- Um sistema não se altera quando substituímos qualquer uma de suas equações por outra obtida a partir da adição membro a membro desta equação com outra na qual foi aplicada a transformação T2.

O importante é que dois sistemas lineares equivalentes têm as mesmas soluções.

Exemplo:
Encontrar a solução do seguinte sistema linear pelo método de Gauss:

$$x + 3y - 2z = 4$$

$$2x - y + z = 1$$

$$4x + 3y - 5z = 2.$$

1) Troque a primeira equação pela segunda (T1).

$2x-y+z=1,$

$x+3y-2z=4,$

$4x+3y-5z=2.$

2) Multiplique a segunda equação por (-2), some com a primeira e substitua a segunda por esta equação.

$2x-y+z=1,$

$-7y+5z=-7,$

$4x+3y-5z=2,$

3) Multiplique a primeira por (-2), some com a terceira e substitua a terceira por esta.

$2x-y+z= 1,$

$-7y+5z= -7,$

$5y-7z= 0,$

4) Multiplique a segunda por 5 e a terceira por 7.

$2x-y+z=1,$

$-35y+25z=-35,$

$35y-49z=0$

5) Some a segunda com a terceira e obtenha $-24z =-35$, ou $z = 35/24$. Daí encontre y na segunda equação e x na primeira. A solução é (19/24, 49/24, 35/24).

O bom deste método é que, aplicando as T1, T2 e T3, é possível transformar o sistema inicial em um sistema linear equivalente que é "enxuto", eliminando as equações que são linearmente dependentes.

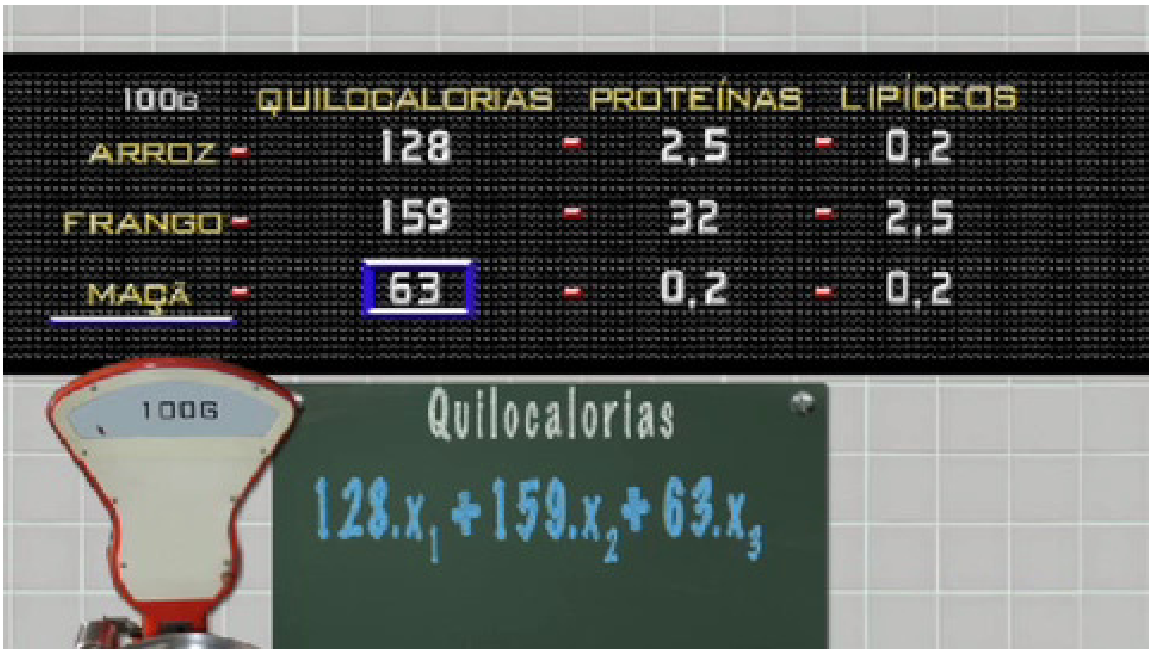

Figura 1: Ilustração do vídeo

No processo aplicado num sistema linear de duas equações a duas incógnitas, podem ocorrer então três situações:

1) O sistema ter uma única solução.

2) Pode ocorrer de as duas equações serem linearmente dependentes, ou seja, fornecerem as mesmas informações sobre as incógnitas, por exemplo: o sistema $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$.

   No processo de eliminação, ficamos somente com uma equação, pois as duas são equivalentes. Assim, a solução do sistema é dada pela primeira equação: $S = \{(x,y), y = 2-x, x \text{ real}\}$.

3) Pode ocorrer um terceiro caso em cujo processo aparece uma equação que é uma informação impossível. Por exemplo, tome o sistema $x + 2y = 1$, $x + 2y = 5$.

   No processo final, vai aparecer $x+2y=1$, $0x+0y=-4$ (substituindo a segunda equação pela subtração das duas primeiras).

   Este sistema não tem solução.

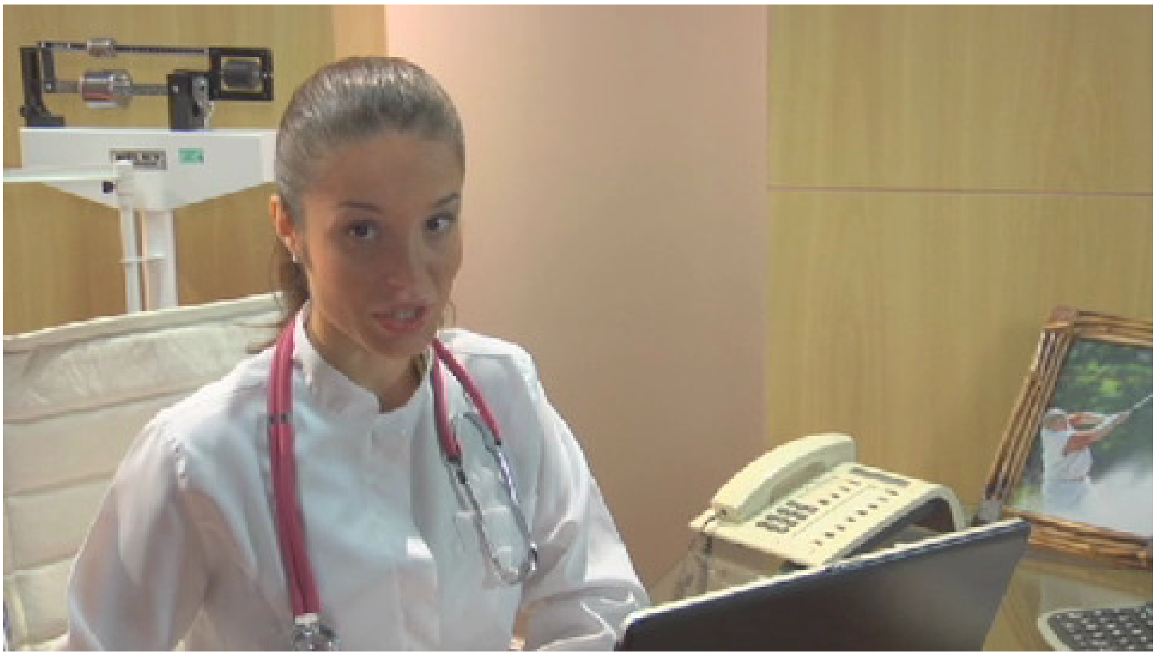

Figura 2: A nutricionista monta as equações

Sugestões de atividades

Depois da execução

Lembre-se de que a equação de um plano π em R^3 é dada por

$Ax+By+Cz = D$, onde A, B, C e D são números.

Aproveite esta retomada em sistemas lineares para resolver um exercício de geometria analítica:

Considere três planos distintos. Mostre que as posições relativas possíveis dos planos são:

- Os três planos são paralelos.
- Dois deles são paralelos e o terceiro é secante a ambos, cortando-os segundo retas paralelas.
- Os três planos se cortam segundo uma reta.

- Os três planos se cortam dois a dois, segundo três retas paralelas.
- Os três planos se cortam dois a dois, segundo três retas concorrentes; o ponto comum às três retas é o único ponto comum aos três planos.

Referência:

E.Lages Lima, P.C.P. Carvalho, E.Wagner,A.C.Morgado, A Matemática do Ensino Médio, volumes 2 e 3.Coleção do Professor de Matemática – SBM,Rio de Janeiro
E. Lages Lima, Coordenadas no Espaço – Coleção do Professor de Matemática – SBM

Ficha técnica

Autor *Otilia Paques*
Revisor *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*