Matemática Multimídia

Análise de dados e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

Coisa de passarinho

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir o conceito de probabilidade;
2. Apresentar a interpretação frequentista de probabilidade;
3. Definir experimentos equiprováveis.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Coisa de passarinho

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade, Frequências relativas.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Introduzir o conceito de probabilidade;
2. Apresentar a interpretação frequentista de probabilidade;
3. Definir experimentos equiprováveis.

Sinopse
Caio se acha um rapaz sem sorte. Através de uma conversa com o pai, é abordado o conceito de probabilidade de um evento e sua importância em previsão de fenômenos aleatórios.

Material relacionado
Áudios: *O que é – probabilidade subjetiva;*
Experimentos: *Jogo do relógio; Jogo dos Divisores;*
Softwares: *Probabilidade com urnas.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda o conceito de probabilidade do ponto de vista frequentista. Mais precisamente, consideremos um experimento aleatório, E, e seu espaço amostral associado S, isto é, S é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento E.

Se este conjunto for finito, como nos exemplos apresentados no vídeo, podemos definir a função de probabilidade associada ao experimento como uma função real que, a cada resultado possível, associa um número entre 0 e 1, de modo que a soma total destes valores seja igual a 1. O valor associado a cada resultado representa a chance de que este evento ocorra ao realizar o experimento.

Assim, a probabilidade de qualquer resultado possível pode ser vista como uma aproximação das frequências relativas desse resultado quando repetimos o experimento nas mesmas condições e da mesma maneira, um número muito grande de vezes.

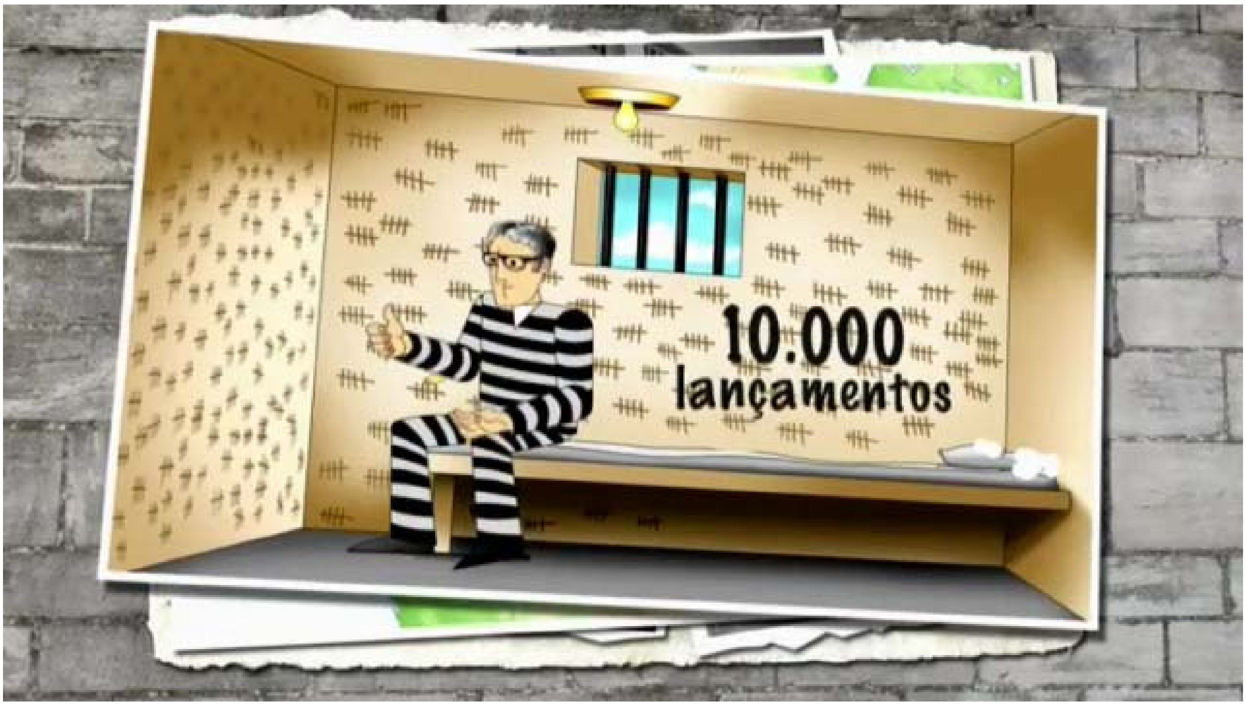

Figura 1: experimento de John Kerrich

Esta abordagem de probabilidade foi uma das primeiras definições formais deste conceito, e surgiu no século XIX, no contexto de jogos de azar.

Observemos, no entanto, que estamos exigindo nesta definição que o experimento possa ser repetido várias vezes e da mesma maneira, o que usualmente não é possível em situações reais.

O segundo conceito abordado no vídeo diz respeito a experimentos (ou espaços) equiprováveis, ou seja, experimentos com finitos resultados, todos com a mesma probabilidade de ocorrer.

Esta noção é bastante comum e razoável em muitas situações teóricas, como nos exemplos de lançamentos de dados ou moedas. No entanto, mais uma vez, na prática não é tão razoável assim que mecanismos físicos mantenham esta espécie de simetria nos resultados, dado que outros fatores (como atrito com a superfície, imperfeição do material, etc.) podem alterá-la.

Por que então falar destes conceitos tão pouco plausíveis na vida real?

Porque estes representam os modelos probabilísticos mais simples, matematicamente falando, que nos permitem construir, a partir deles, modelos mais complexos e mais apropriados para diversos problemas.

Assim, se tivermos, por exemplo, um experimento E com somente dois resultados, A e B, tais que A tem o dobro da probabilidade de B de ocorrer, poderíamos representar o experimento E como o lançamento de um dado, onde as faces 1, 2, 3 e 4 representam o evento A, e as faces restantes, 5 e 6, representam o evento B. Cada vez que lançássemos este dado, teríamos um dos possíveis resultados, A ou B, do mesmo modo que poderíamos ter se realizássemos o experimento original, E.

Na construção deste modelo não estamos levando em conta a natureza do experimento E.

O experimento E poderia ser a observação de uma característica genética em indivíduos, que ocorre em aproximadamente 2/3 da população.

Se todos os indivíduos tivessem a mesma probabilidade de ter a característica, então uma amostra grande deveria manter esta proporção.

Amostras de populações de duas regiões diferentes deveriam manter também esta mesma proporção. Diferenças grandes, pouco esperadas, entre as duas amostras poderiam fazer desconfiar da homogeneidade da característica na população nas duas regiões, já que os resultados do lançamento do dado (modelo teórico) não deveriam apresentar muita diferença em duas sequências de lançamentos.

Assim, o modelo equiprovável poderia ser utilizado, por exemplo, para testar a homogeneidade de um fenômeno observado na prática em dois grupos diferentes, ou da ocorrência do fenômeno em duas situações diferentes.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Alguns dos experimentos e softwares da coleção M^3 trabalham com o conceito frequentista de probabilidade em espaços equiprováveis.

Em particular, o software *Probabilidade com Urnas* utiliza as frequências relativas de extrações (com ou sem reposição) de bolinhas coloridas de uma urna para aproximar a proporção de bolinhas de cada cor dentro da urna.

Também o *Jogo dos Divisores* lida com decisões a partir de resultados do lançamento de dados.

Uma destas atividades poderia ser realizada antes de assistir ao vídeo, para que os alunos adquiram familiaridade com a noção de frequências relativas.

Depois da execução

O cálculo de probabilidades, mesmo no caso equiprovável, pode se tornar muito complexo. Que tal desafiar seus alunos a resolverem os problemas a seguir?

Desafio 1
Você lançará uma moeda balanceada 7 vezes. Qual é a probabilidade de obter pelo menos quatro caras?

R. Observemos que o espaço amostral deste experimento é o conjunto de todas as sequências de caras e coroas de comprimento 7.

Assim, se denotarmos por C, face cara, e por K, face coroa, o espaço amostral S contém os resultados, CCCCCCC, KCCCCCC, CKCCCCC, CCKCCCC, CCKKCCC, e assim por diante.

Observemos que o total de resultados possíveis é igual a $2^7=128$, já que cada uma das sete posições tem duas possibilidades (C ou K).

Destes resultados estamos interessados naqueles que contenham pelo menos quatro caras, ou, equivalentemente, que contenham até três coroas.

Sabemos da combinatória que a quantidade de combinações que podemos fazer considerando n objetos em grupos de p objetos é dada por

$C(n,p)= n!/[p!\,(n-p)!]$

Temos $C(7,4)=35$ maneiras de ter 4 caras e 3 coroas, indicando o total de posições diferentes em sete em que as quatro caras poderiam estar.

Do mesmo modo, temos $C(7,5)=21$ maneiras de ter 5 caras e 2 coroas, $C(7,6)=7$ maneiras de ter 6 caras e 1 coroa, e $C(7,7)=1$ forma de ter 7 caras.

Assim, para a pergunta do Desafio 1 temos um total de $35+21+7+1=64$ resultados com pelo menos 4 caras. Como cada sequência individual tem a mesma probabilidade de ocorrer, a probabilidade de obter pelo menos 4 caras em 7 lançamentos é igual a $64/128 = 1/2$.

Desafio 2
Você tem 5 bolinhas indistinguíveis entre si que serão colocadas aleatoriamente em 5 urnas, cada uma com capacidade para 5 bolinhas. Qual é a probabilidade de que nenhuma urna fique vazia?

R. Podemos representar as urnas e bolinhas por símbolos. Adotemos a barra | para indicar um lado da urna ou uma divisória entre duas urnas, e asterisco * para uma bolinha. Com esta notação, a sequência

|**| | | ***| |

representa: duas bolinhas na primeira urna, três bolinhas na quarta urna, e as demais urnas vazias.

Estamos interessados na probabilidade de obter a sequência

|*|*|*|*|*|

com uma bolinha em cada urna.

Observemos que temos 5 asteriscos e 6 barras, das quais as duas dos extremos estão fixas, já que nenhuma bolinha pode ficar fora das urnas.

Ou seja, todos os resultados possíveis podem ser obtidos com permutações de 5 asteriscos e 4 barras.

O total de permutações possíveis é igual ao total de combinações de 4 em 9, que representam as possíveis posições das quatro barras na sequência de 9 símbolos, $C(9,4) = 126$.

Destas, apenas uma é de interesse. Portanto, a probabilidade de ter todas as urnas com uma bolinha é igual a 1/126.

Isto significa que se você realizasse o experimento 126 vezes, então, em média, você obteria todas as urnas com uma bolinha uma única vez.

Sugestões de leitura

P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.
W. Feller (1976). Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações, vol I. Editora Edgard Blücher.
Site recomendado: ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada, http://alea-estp.ine.pt

Ficha técnica

Autor: *Laura Leticia Ramos Rifo*
Revisão: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*