Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

Os caçadores de sons de Fibonacci.

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar a sequência de Fibonacci por meio de uma música.
2. Desde que o número de ouro está intimamente ligado a esta sequência, vamos apresentá-lo e mostrar como é esta relação.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Os caçadores de sons de Fibonacci

Série
Matemática na Escola

Conteúdo
Sequência de Fibonacci e o número de ouro (secção áurea).

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar a sequência de Fibonacci, que tem uma fórmula recursiva.
2. Introduzir o conceito de secção áurea e do número de ouro.
3. Relacionar a sequência de Fibonacci com o número de ouro.

Sinopse
Um jovem liga o seu computador num estúdio de música, e vê na tela um aviso de que um vírus está prestes a atuar. Ele tem que solucionar três enigmas, que estão relacionados com uma música intitulada Tocata de Fibonacci (a partitura está passando na tela). O jovem telefona para um amigo que é professor de Matemática. Os dois conseguem finalmente resolver os enigmas relacionados com a sequência de Fibonacci.

Material relacionado
Vídeos*: O Código de Pascal, Encontro inusitado e Naturalmente.*

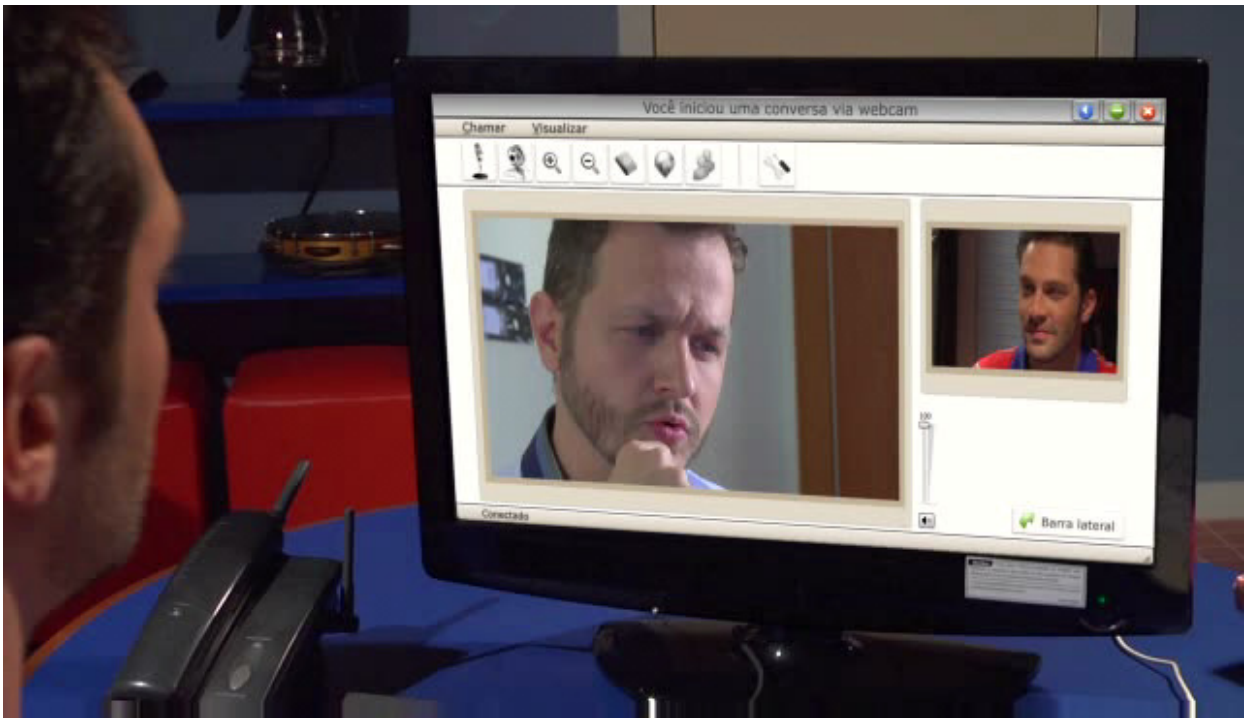
Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda a sequência de Fibonacci, por meio de uma música e do problema dos coelhos. Uma boa idéia relacionando a música e a matemática.



Figuras 1 e 2: Os enigmas para evitar um vírus caçadores de sons.

UM POUCO DE HISTÓRIA–Leonardo de Pisa (1180–1250), mais conhecido como Fibonacci, é considerado o matemático mais capaz do ocidente no período medieval. Sua obra mais famosa é o "Liber abaci". Para tornar a leitura deste livro mais interessante, Fibonacci incluiu alguns problemas curiosos, como o do casal de coelhos que aparece no vídeo. No século XIX o matemático Eduard Lucas (1842–1891), criador do famoso jogo Torres de Hanoi, deu à sequência (F_n)=(1,1,2,3,5,8,13,21,34,....) o nome de sequência de Fibonacci. Os termos desta sequência são chamados de números de Fibonacci.

(F_n) é definida pela seguinte fórmula recursiva:

$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$

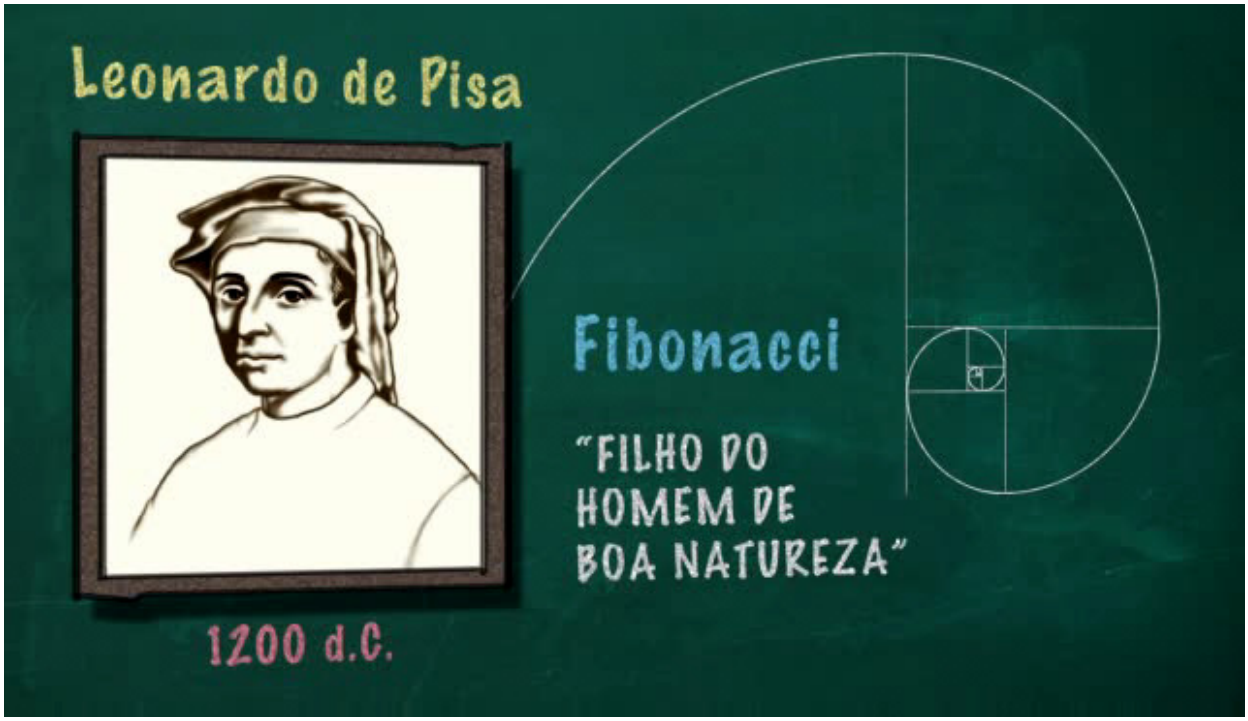


Figura 3: Ilustração do vídeo

FIBONACCI E A MÚSICA

Béla Bartók é considerado um dos maiores compositores do século XX. Nasceu na Húngria em 1881 e morreu em Nova York em 1945. Béla Bártok e muitos compositores como Mozart, Beethoven, Bach, usam na estrutura de suas obras a inspiração da razão áurea, que está ligada à sequência de Fibonacci.

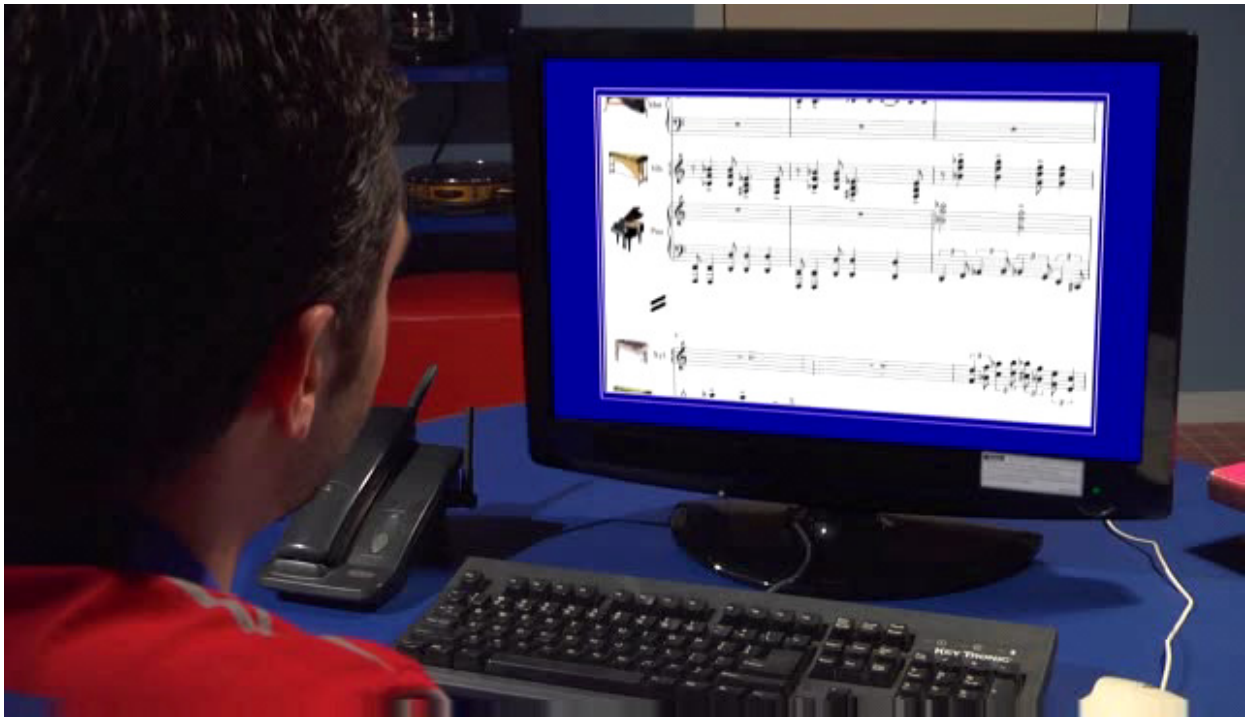


Figura 4: Os sons de Fibonacci.

Sugestões de atividades

Depois da execução

ATIVIDADE 1

O vídeo apresenta uma "pseudo-espiral" de Fibonacci, que o professor, pode construir com os seus alunos usando régua e compasso, da seguinte maneira:

Inicialmente construa numa folha de papel o retângulo abaixo começando com dois quadrados de lado 1, em seguida um retângulo 2x1, um quadrado de lado 2, um retângulo 3x2, um quadrado de lado 5, um retângulo 8x5, um quadrado de lado 8, um retangulo 13x8, e um quadrado de lado 13. Veja a figura pronta abaixo. Observe que o retângulo final tem dimensões 21x13 e que 21/13 é aproximadamente igual a 1,61538. Usando um compasso, trace quartos de circunferência, e com as concordâncias dessas curvas obtenha a

pseudo-espiral. Finalmente mostre aos alunos a foto de um molusco chamado Nautilus com a espiral desenhada.

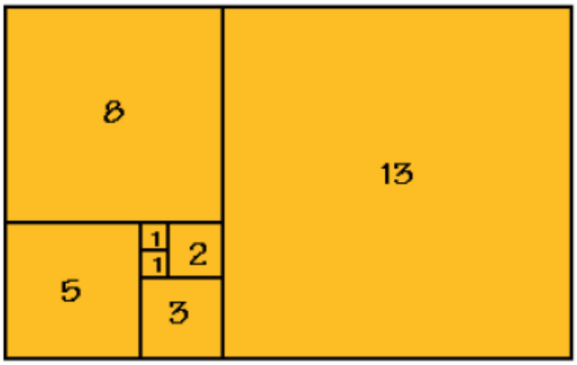


Figura 5: construção da "pseudo-espiral" parte 1

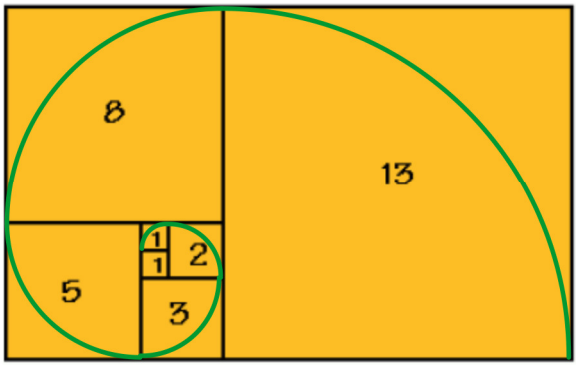


Figura 6: construção da "pseudo-espiral" parte 2

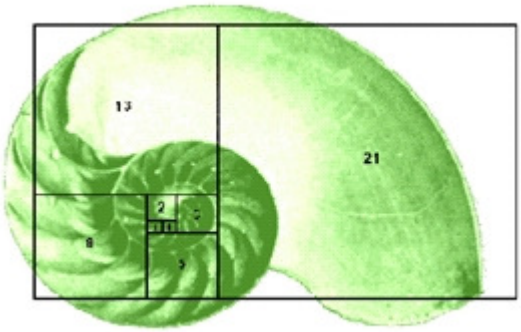


Figura 7: comparação da "pseudo-espiral" e o molusco nautilus

A espiral de Fibonacci aparece no interior de um retângulo áureo, como veremos a seguir. O retângulo acima desenhado é uma aproximação do retângulo áureo.

FIBONACCI E A NATUREZA.
Além do Nautilus a sequência de Fibonacci aparece muitas vezes na natureza.
Pode-se analisar uma flor: as margaridas têm em geral 34,55 ou 89 pétalas.

Figura 8: margaridas

Um abacaxi tem 8 diagonais num sentido e 13 num outro.
Nas plantas, são as folhas as responsáveis pela absorção da luz e pela canalização da água para as raízes. Para isto, é importante que as folhas se sobreponham o mínimo possível. Isto é conseguido pela rotação das folhas ao longo do caule. Há duas rotações possíveis, da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Numa grande maioria das plantas, o número de rotações para a esquerda até que uma nova folha fique embaixo de outra, o número de rotações para a direita até que uma nova folha fique embaixo de outra, e o número de folhas nascidas até esta "sobreposição" são 3 números consecutivos da sequência de Fibonacci. Poderão, por exemplo, ser 3 rotações para a esquerda, 5 para a direita e 8 folhas no total para que surja uma nova folha por cima da folha "original". Ou então, 8 para a esquerda, 5 para a direita e 13 folhas para a sobreposição.

Figura 9: posição das folhas obedecendo a seqüência de Fibonacci

Certas plantas mostram os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos. Suponhamos que nasça um novo broto de um galho a cada mês (sabendo que um broto leva dois meses para produzir o seu primeiro broto). Veja a figura. Existem várias plantas cujo crescimento é parecido com o descrito acima, como por exemplo, a Achillea ptarmica.

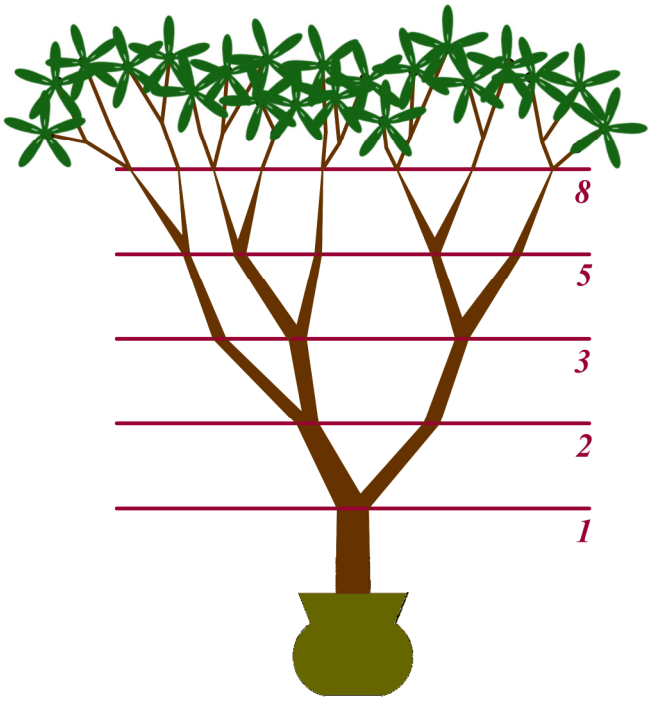


Figura 10: crescimento de galhos de acordo com a seqüência de Fibonacci

ATIVIDADE 2

Numa colméia há três tipos de abelhas, a rainha, o zangão e as obreiras. As obreiras fazem todo o trabalho na colmeia e a rainha produz as obreiras e os zangões. Os zangões nada fazem, além de uma única vez em que perseguem uma jovem rainha para fertilizá-la. Um consegue e morre, os outros não conseguem e morrem também. Quando o ovo é fertilizado, pelo semem do único zangão que a fecundou, nasce uma obreira com 32 pares de cromossomos. Se o ovo não for fertilizado nasce um zangão com 16 pares de cromossomos.

Em função disto, cada zangão não tem pai, mas tem dois avôs por parte de mãe.

Professor, usando as idéias da sequência de Fibonacci, pedir aos alunos que calculem o número de ancestrais de um zangão *n* gerações atrás.

Solução: 1 zangão teve uma mãe, teve 2 avôs, (uma fêmea e o zangão que a fecundou), teve 3 bisavós(a fêmea e o macho pais da sua avó e mãe do avô),teve 5 tetravós(as duas mães e os dois pais das suas duas avós e a mãe do bisavô), teve 8 tetravós (as 3 mães e 3 os pais das duas bisavós). O número de ancestrais segue uma sequência de Fibonacci.

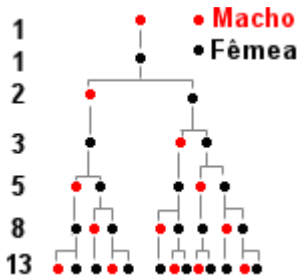


Figura 11: número de ancestrais de um zangão

SEGMENTO AUREO- razão áurea – número de ouro

Dado o segmento AB, de comprimento a, podemos determinar nele um ponto E tal que $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$. O segmento AE é chamado de segmento áureo de AB. (Euclides descreveu isto em sua Proposição VI, 30, como: "dividir um segmento em média e extrema razão").

Denotando $AE = x$, obtemos $EB = a - x$ e então, podemos escrever:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)}$, ou $x^2 + ax - a^2 = 0$ (1). A solução positiva desta equação

é $x = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$.(lembre que a >0)

A razão $\frac{a}{x}$, é conhecida por muitos como a razão áurea e o número irracional $\Phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, como o número de ouro. (consta que este nome é em homenagem a Fidias, o famoso arquiteto e escultor grego que viveu há 2400 anos e que aparentemente abusava desta razão em suas obras, foi ele quem fez o Parthenon.

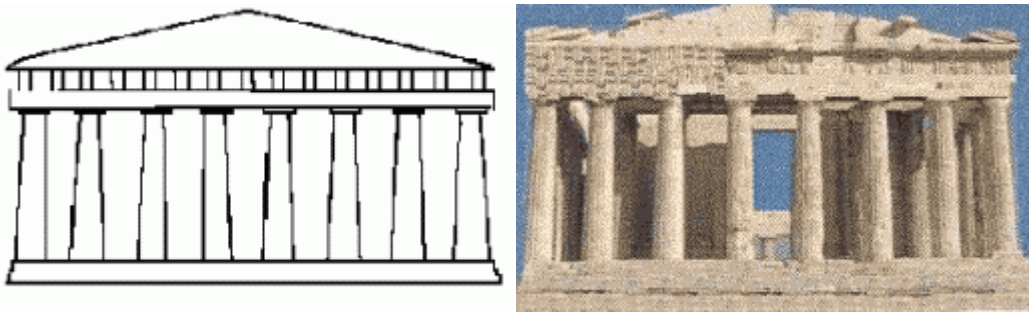


Figura 12: Parthenon à direita e esboço à esquerda

Em seguida veremos a construção geométrica do segmento áureo de um segmento dado, que os alunos devem fazer com o professor.

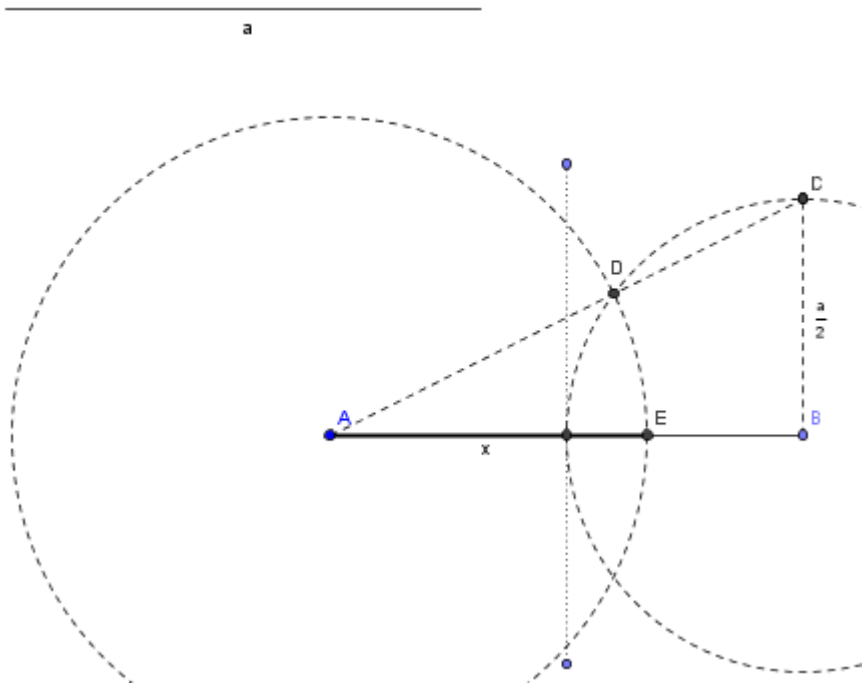
Procedimento.

1) Dado o segmento AB de comprimento *a*.

Construir inicialmente um triângulo retângulo ABC que tenha como catetos *a* e a/2.

2) transportar a partir de C e sobre a semi-reta CA , o segmento CB, determinando o ponto D.

O ponto E , pertencentea AB é tal que AE é congruo a AD, é o que estamos procurando, e x = AE.



Justificativa: Por Pitágoras, $(x+a/2)^2 = a^2 + (a/2)^2$., de onde obtemos

$x^2 + ax - a^2 = 0$, que é equivalente à relação (1).

RELAÇÃO ENTRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO.

O professor pode sugerir aos alunos encontrar a representação em fração continua do numero Φ. Se eles não sabem, veja o artigo do Carlos G. Moreira, [2].

Sabemos que tal representação é periódica e é dada por:

$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$ ou = (1;1,1,1,1,1,1,.....).

Temos então a primeira aproximação de Φ como 1 , a segunda como (1;1) = $1+\frac{1}{1}=2$, a terceira aproximação como (1;1,1) = $1+\frac{1}{(1+1)}=\frac{3}{2}$, a quarta (1;1,1,1) =$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}$, sendo que as próximas serão, $\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13}$,$\frac{34}{21}$, etc, ou seja os elementos da sequência $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Ou seja,a sequência dos quocientes $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ converge para Φ.

RETÂNGULO ÁUREO é um retângulo cuja razão entre a sua base b e sua altura h é a razão áurea, ou seja, $\frac{b}{h}=\Phi$.

Assim sendo, voltando ao primeiro retângulo construído no inicio, cuja razão das dimensões é $\frac{21}{13}=\frac{F_8}{F_7}$, ele é uma aproximação do retângulo áureo. Continuando o mesmo processo indefinidamente obtemos o retângulo áureo!!!!

Porém, existe um método de construção com régua e compasso do número Φ, que constrói o retângulo áureo.

Procedimento:

Seja dado o lado menor b do retangulo áureo. Construimos um quadrado ABCD de lado b e, com centro no ponto médio do lado AB, traçamos o arco CE com E no prolongamento do lado AB. Afirmamos que AEFD é um retangulo áureo.

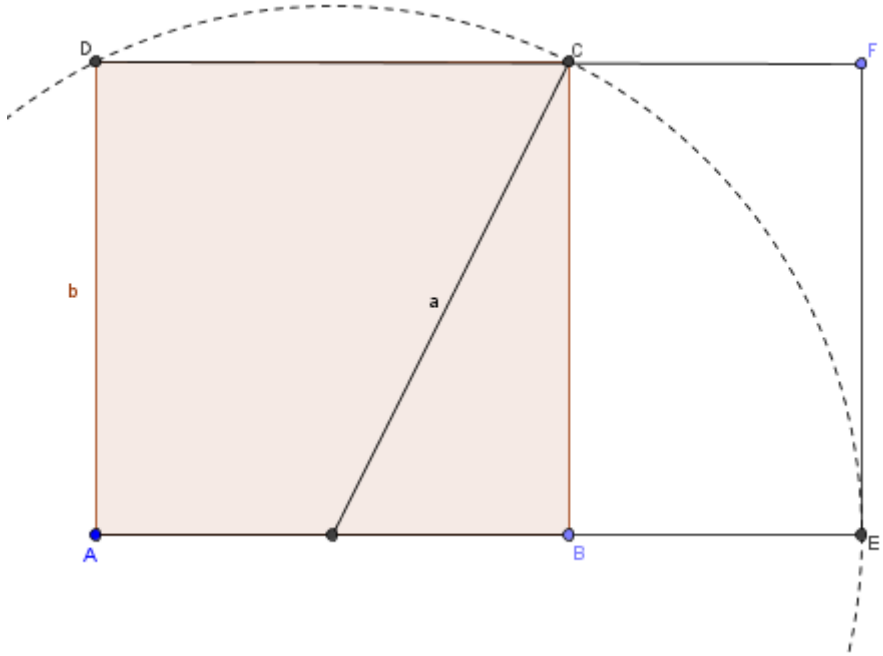


Figura 10: construção do retângulo áureo

Justificativa: Do teorema de Pitágoras, temos que

$a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{5b^2}{4}$ e portanto, $a = \left(\frac{b\sqrt{5}}{2}\right)$.

Logo, $AE = \frac{b}{2} + a = \frac{b\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$. Então a razão entre a base e a altura deste retangulo é Φ.

Em seguida construir no retângulo áureo obtido a espiral de Fibonacci.

Procedimento:

No retangulo áureo, trace os quadrados como abaixo e os arcos de cicunferencias. O polo da espiral se encontra no encontro das duas diagonais.

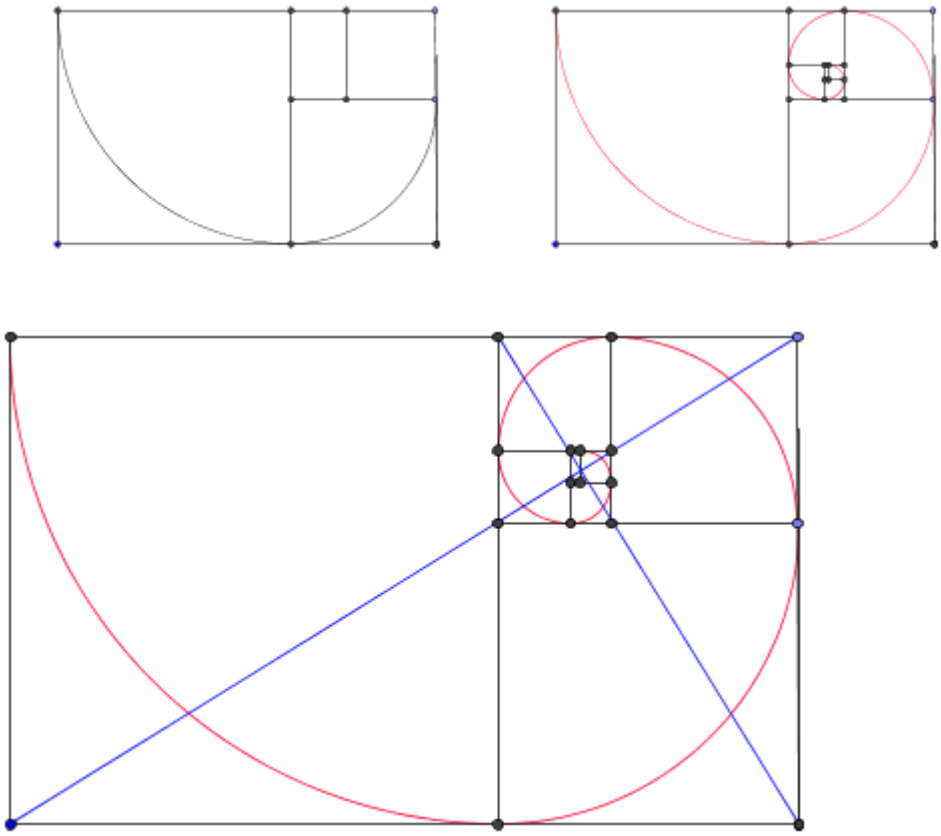


Figura 11: construção da espiral áurea

Referências Bibliográficas e Sugestões de leitura

[1] H.E.Huntley, A Divina Proporção- um ensaio sobre a beleza na Matemática- Editora da Universidade de Brasilia – 1985.

[2] Carlos Gustavo Moreira, Frações Continuas, representações de números e aproximações- www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/docs/fracoes.ps, pagina visualizada em dia 23 de maio de 2010.

[3] Wagner M.Pommer, Frações continuas no ensino médio? Seminários de Ensino de Matemática/SEMA-FEUSP- coordenação Pr. Dr. Nilson J.Machado-www.nilsonmachado.net/sema20090901.pdf- pagina visualizada em 23 de maio de 2010.

[4] J.C.Sampaio e Paulo A.S.Caetano, Introdução a teoria dos números- um curso breve- eduFsCar.2008.

[5] Eliane Q. Rezende e Maria Lucia B Queiros, Geometria euclidiana plana e construções geométricas- Editora da Unicamp-segunda edição- 2009.

[6] Hygino H.Domingues, Fundamentos de Aritmética-Atual Editora-1991.

Ficha técnica

Autor do Guia: *Otilia Terezinha W. Paques*
Revisão do Guia: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*