Guia do Professor

Conteúdos Digitais

A cidade que se multiplica

Série Mundo da Matemática

Audiovisual 03

Coordenação Geral

Elizabete dos Santos

Autores

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Souza
Karina Alessandra Pessôa da Silva
Lourdes Maria Werle de Almeida
Luciana Gastaldi Sardinha Souza
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Rodolfo Eduardo Vertuan

Revisão Textual

Elizabeth Sanfelice

Coordenação de Produção

Eziquiel Menta

Projeto Gráfico

Juliana Gomes de Souza Dias

Diagramação e Capa

Aline Sentone
Juliana Gomes de Souza Dias

Realização

Multimeios
Secretaria de Estado
da Educação do Paraná

DISTRIBUIÇÃO GRATUITA
IMPRESSO NO BRASIL

Audiovisual “O mundo da matemática”

Episódio 3 – “A cidade que se multiplica”

Introdução

No audiovisual “A cidade que se multiplica”, episódio 3 do programa “O Mundo da Matemática”, enquanto espera por Júlia, Rafael ouve Julinho ler uma matéria que fala sobre o crescimento da população da cidade onde eles vivem. Os números mostram que a população está crescendo em função exponencial. Julinho, que deseja um dia montar seu próprio negócio, se interessa pelo assunto e quer saber mais.

Função exponencial

Chama-se função exponencial qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Algumas propriedades da função exponencial são:

1) Na função exponencial $y = a^x$, temos $x = 0 \Rightarrow y = f(x) = f(0) = a^0 = 1$, ou seja, o par ordenado (0,1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a $(a>0$ e $a \neq 1)$. Isto quer dizer que o gráfico de qualquer função exponencial corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

2) Se $a>1$, então a função $f(x) = a^x$ é crescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$ são crescentes, por exemplo, as funções exponenciais: $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

3) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é decrescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$ são decrescentes, por exemplo, as funções exponenciais $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $f(x) = (0,1)^x$.

4) Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$

5) Para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$; portanto o gráfico da função $y = a^x$ está sempre acima do eixo dos x.

6) Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores.

7) Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores.

8) O conjunto imagem da função exponencial $y = a^x$ é $\mathrm{Im} = \{y \in IR / y > 0\} = IR_+^*$.

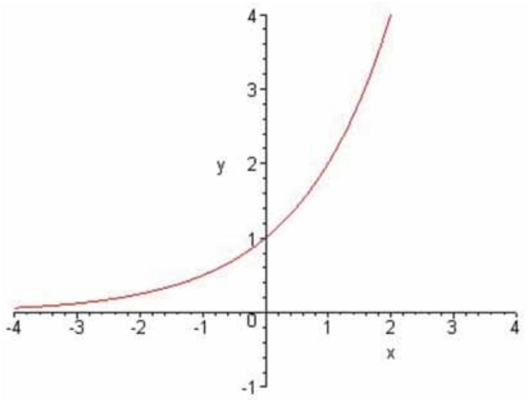


Gráfico 1: Função exponencial crescente $y = 2^x$ $(a > 1)$.

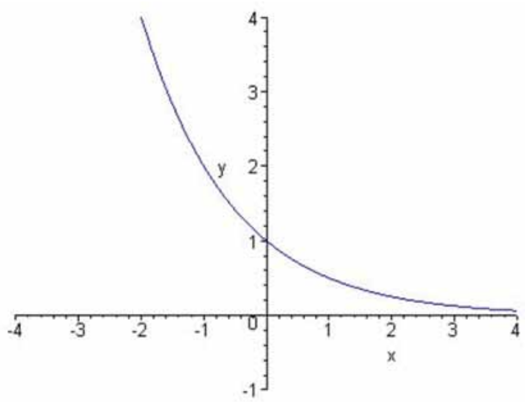


Gráfico 2: Função exponencial decrescente $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $(a<0<1)$.

Objetivos

- Estabelecer a relação entre matemática e crescimento populacional.
- Estabelecer relações entre função exponencial e progressão geométrica.
- Encontrar uma função exponencial a partir de um conjunto de pontos.
- Representar graficamente uma função exponencial.

Sugestão de atividades

Após assistir ao vídeo, o professor pode propor atividades que permitam aos alunos refletir, questionar e aprofundar seus conhecimentos sobre os conteúdos abordados. A seguir apresentamos algumas sugestões.

Atividade 1

Determinar uma expressão matemática que descreve o crescimento populacional da cidade de Curitiba.

A tabela a seguir apresenta o número de habitantes da cidade de Curitiba no período de 2000 a 2009, segundo o IBGE.

N	ANO	POPULAÇÃO
0	2000	1 618 279
1	2001	1 620 219
2	2002	1 644 600
3	2003	1 671 194
4	2004	1 727 010
5	2005	1 757 904
6	2006	1 788 559
7	2007	1 797 408
8	2008	1 828 092
9	2009	1 851 215

Tabela: Número de habitantes de Curitiba de 2000 a 2009

Fonte: IBGE

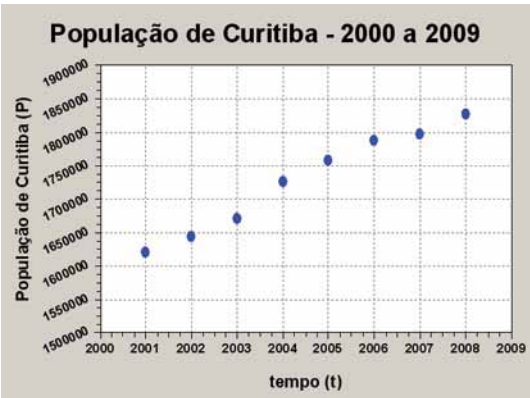
Comentários para o professor:

A partir dos dados da tabela, os alunos poderão iniciar a dedução da expressão matemática que representa o crescimento populacional do município em questão.

Nesta situação, vamos considerar como variáveis do problema:

- o tempo (em anos): t
- o número de habitantes no ano: P(t)

A partir disso, os dados da tabela podem ser representados em um plano cartesiano. Considerando a variável independente como sendo o tempo (*t*) e a variável dependente como sendo **a** o número de habitantes (*P*).



A partir do gráfico, é possível concluir que o número de habitantes de Curitiba está crescendo.

Analisando os valores da tabela e a tendência dos dados no gráfico, é possível perceber que há uma proporção entre esses dados, ou seja, dividindo o número de habitantes de um ano pelo número de habitantes do ano anterior, há uma proporção. Para isso, pode-se construir a tabela a seguir.

ANO	POPULAÇÃO	POPULAÇÃO DE UM ANO DIVIDIDO PELA POPULAÇÃO DO ANO ANTERIOR P_{n+1}/P_n
2000	1 618 279	
2001	1 620 219	1,001
2002	1 644 600	1,015
2003	1 671 194	1,016
2004	1 727 010	1,033
2005	1 757 904	1,018
2006	1 788 559	1,017
2007	1 797 408	1,005
2008	1 828 092	1,017
2009	1 851 215	1,013

Neste caso, uma função exponencial pode ser adequada para descrever o comportamento da situação.

Mas o que é uma função exponencial?

Chama-se função exponencial qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Olhando na tabela vemos que: $\frac{P_{n+1}}{P_n} = k$

Podemos escrever como: $P_{n+1} = k\,.\,P_n$

Atribuindo valores para n

$$n = 0 \to P_1 = k.P_0$$
$$n = 1 \to P_2 = k.P_1 \to P_2 = k.k.P_0 = k^2.P_0$$
$$n = 2 \to P_3 = k.P_2 \to P_3 = k.k^2.P_0 = k^3.P_0$$
$$n = 3 \to P_4 = k.P_2 \to P_4 = k.k^3.P_0 = k^4.P_0$$

e assim sucessivamente.

Com isso, ficamos com a expressão geral $P_i = k^i\,.\,P_0$ em que P_0 = 1618279 (que corresponde ao número de habitantes para n = 0, ou seja, para t = 2000.

Para resolver essa expressão, podemos utilizar dois dos pontos da tabela que apresenta o número de habitantes de Curitiba de 2000 a 2009.

Vamos escolher os pontos: P_2 = (2 , 1644600) e P_8 = (8 , 1828092)

Esta escolha nos permite encontrar o valor de k.

A solução é k = 1,015

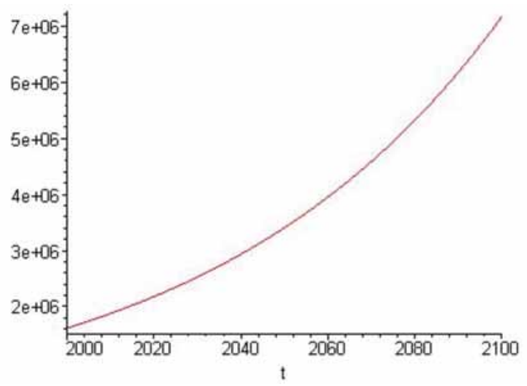
Então a função que descreve a população de Curitiba de acordo com o tempo é:

P_i = $(1{,}015)^i$. 1618279, em que $i = t - 2000$

Daí, temos P_{t-2000} = $(1{,}015)^{t-2000}$. 1618279

O professor pode sugerir aos alunos que construam o gráfico da função exponencial P_{t-2000} = $(1{,}015)^{t-2000}$. 1618279.

O gráfico dessa função é:



Atividade 2

Determinar qual é o número de habitantes da cidade de Curitiba para o ano de 2010.

Comentários para o professor:

Para responder à questão do problema, substituímos o ano t = 2010 na expressão $P_{t\text{-}2000} = (1{,}015)^{t\text{-}2000} \,.\, 1618279$.

Temos que $P_{2010\text{-}2000} = (1{,}015)^{2010\text{-}2000} \,.\, 1618279$

Assim, $P_{2010} = 1\,878\,079$.

Assim, é possível concluir que se a população de Curitiba continuar crescendo na proporção apresentada na tabela, ao final de 2010, será próxima de 1 milhão e 900 mil habitantes.

Atividade 3

Se o número de habitantes de uma cidade, nos últimos 5 anos, tem crescido a uma taxa de 1,5% ao ano, determine qual será o número de habitantes para o ano de 2010. Para isso, considere a tabela

N	ANO	POPULAÇÃO
0	2000	1 618 279
1	2001	1 620 219
2	2002	1 644 600
3	2003	1 671 194
4	2004	1 727 010
5	2005	1 757 904
6	2006	1 788 559
7	2007	1 797 408
8	2008	1 828 092
9	2009	1 851 215

Tabela: Número de habitantes de Curitiba de 2000 a 2009.
Fonte: IBGE

Comentários para o professor:

Se o número de habitantes de uma cidade cresceu de 2005 a 2009 a uma taxa de 1,5% ao ano, podemos considerar esse crescimento como uma Progressão Geométrica.

Trabalhando com a definição de Progressão Geométrica juntamente com o estudo de função exponencial, os alunos podem relacionar que a PG é uma função exponencial discreta.

Neste momento, apresente aos alunos alguns conceitos sobre PG.

*Uma progressão geométrica, ou simplesmente **P.G.**, pode ser definida como uma sucessão de números reais obtida, com exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa **q**, chamada **razão**.*

*Podemos calcular a razão da progressão, caso ela não esteja suficientemente evidente, dividindo entre si dois termos consecutivos. Por exemplo, na sucessão (1, 2, 4, 8,...), **q = 2**.*

Cálculos do termo geral

*Numa progressão geométrica de razão **q**, os termos são obtidos, por definição, a partir do primeiro, da seguinte maneira:*

$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	**...**	$\mathbf{a_{20}}$	**...**	$\mathbf{a_n}$	**...**
a_1	$a_1.q$	$a_1.q^2$	...	$a_1.q^{19}$		$a_1.q^{n-1}$	...

Assim, podemos deduzir a seguinte expressão do termo geral, também chamado enésimo termo, para qualquer progressão geométrica.

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Portanto, se por exemplo, $\mathbf{a_1 = 2}$ e $\mathbf{q = 1/2}$, então:

$$a_n = 2 \cdot (1/2)^{n-1}$$

*Se quisermos calcular o valor do termo para **n = 5**, substituindo-o na fórmula, obtemos:*

$$a_5 = 2 \cdot (1/2)^{5-1} = 2 \cdot (1/2)^4 = 1/8$$

Dessa maneira, para o cálculo do número de habitantes do município em questão devemos considerar:

- razão q = 1,015
- a_1 = 1757904 que é o número de habitantes em 2005

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, então $P_n = 1757904 \cdot (1{,}015)^{n-1}$, onde $n = t-2004$.
Substituindo $t = 2010$ na expressão acima, ficamos com $P_{2010} = 1893762$.

Atividade 4

Proponha aos alunos que determinem uma expressão matemática que representa o crescimento populacional da cidade em que vivem.

Comentários para o professor:

O professor pode sugerir aos alunos que procurem, junto ao Anuário Estatístico, o número de habitantes em um intervalo de 10 anos, por exemplo, para em seguida determinarem a expressão matemática do crescimento populacional. Esses dados também podem ser obtidos em **http://www.ibge.gov.br**

A matemática envolvida para a definição da expressão matemática que representa o crescimento populacional da cidade em que os alunos vivem pode ser diferente da apresentada neste episódio.

4 Avaliação

A avaliação pode ser realizada durante todo o desenvolvimento das atividades, por meio de questionamentos e preenchimento dos quadros. O professor pode aproveitar as respostas dos alunos para fazer as intervenções que julgar necessárias.

5 Sugestões de sítios

O sítio a seguir pode oferecer interessante motivação para pesquisas referentes a dados populacionais de diferentes cidades brasileiras:

http://www.ibge.gov.br

Condigital

FNDE
Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Realização:

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
CADA DIA MELHOR

Seti
Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

UFPR

LACTEC