Secretaria de Estado da Educação do Paraná
Superintendência da Educação
Diretoria de Tecnologia Educacional
Portal Dia a Dia Educa**ção**

Solução do problema Aos Pares

Problema

Você consegue encontrar outros pares de números (inteiros ou decimais) que se comportam como estes?

$$4^2 = 2^4$$

Pista: Você pode começar com um número em particular – digamos, 5 – e procurar o parceiro que combine com ele. Ou você também pode estudar uma conexão algébrica entre esses pares …

Observação

Existem várias maneiras de lidar com este problema aparentemente complicado. Digo "várias", mas elas definitivamente podem não ser as formas mais interessantes!

a) Tratamento algébrico

Se $a^b = b^a$, então podemos dizer que $\frac{a}{b} = x$, de modo que
a = bx (sendo a > b, x > 1)

Depois, $(bx)^b = b^{(bx)}$

Assim, $(bx)^b = (b^x)^b$

E, $bx = b^x$

Finalmente, $x = b^{(x-1)}$

Isto, agora, nos fornece uma forma prática de gerar números gêmeos para *a* e *b*, usando x como parâmetro…

Digamos: Se x = 2, então 2 = b^1 , e b = 2, sendo a = bx = 4. O exemplo que temos para começar!

Se x = 3, então 3 = b^2, e b = $\sqrt{3}$, sendo a = bx = 3 $\sqrt{3}$.

Se x = 3, então 3 = b^2, e b = $\sqrt{3}$, sendo a = bx = 3 $\sqrt{3}$ ou $3^{1\frac{1}{2}}$

Se x = 4, então 4 = b^3 , e b = $\sqrt[3]{4}$, sendo a = bx = 4. $\sqrt[3]{4}$ ou $4^{1\frac{1}{3}}$ etc. etc. etc.

Para isso, de modo geral, se b = $\sqrt[n-1]{n}$, então a = $\sqrt[n-1]{(n^n)}$, ou b = $n^{(\frac{1}{n-1})}$, e a = $n^{(\frac{n}{n-1})}$

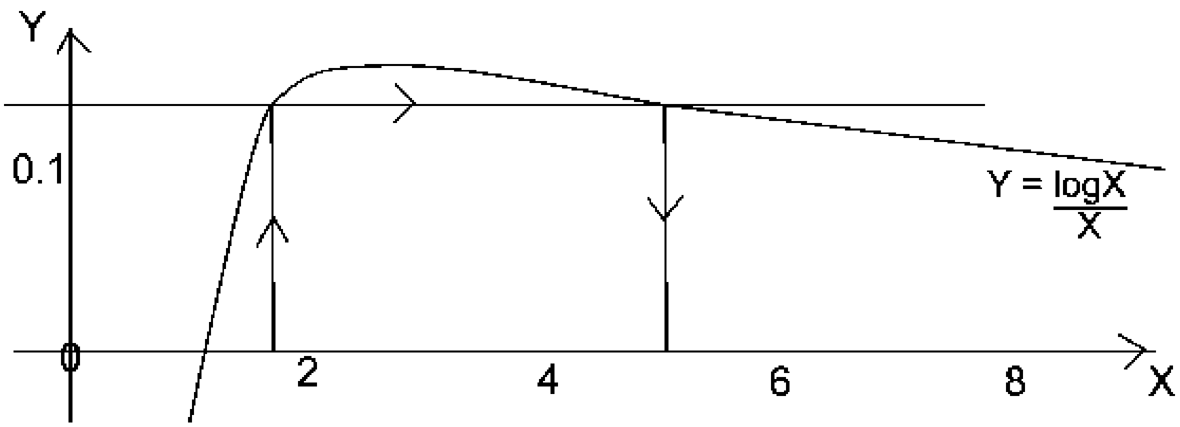
Agora temos um número infinito desses pares, mas se esses são apenas um pequeno subsistema de pares possíveis, eu não sei … A abordagem gráfica (abaixo) mostra que é possível escolher *qualquer* número inicial entre 1 e *e*, e que este será par de outro número maior do que *e*. Então, qualquer número entre 1 e *e* pode ser expresso na forma b = $\sqrt[n-1]{n}$, para um valor n ? Eu não sei!

b) Representação gráfica

Uma vez que $a^b = b^a$,
Então, tomando os logaritmos: b log a = a log b

Então $\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}$

Isso sugere que visualizemos o gráfico y = $\frac{\log x}{x}$, e vejamos quais valores de x fornecem-nos valores iguais de $\frac{\log x}{x}$. Isso nos dará nossos “gêmeos”…



Por exemplo, consideremos uma linha de x = 3 ½ = 1.732 que intercepta a curva em y = 0.1385, e a linha horizontal, por esse ponto cruza a curva novamente em x = 5.083.

Então, ambos os valores de x fornecem o mesmo valor de $\frac{\log x}{x}$, e satisfazem nossa equação original $a^b = b^a$. Eles são, de fato, os gêmeos que correspondem ao valor paramétrico de x = 3 na representação algébrica em A, acima.

Fica evidente que existe um número infinito de gêmeos, que se podem abstrair por qualquer um dos métodos, muito embora procurá-los sem um método sistemático possa ser bem complicado!